偏微分方程式

科学者・技術者のための使い方と解き方

スタンリー・ファーロウ 著
伊理正夫・伊理由美 訳

朝倉書店

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
for Scientists and Engineers

Stanley J. Farlow

The 1st edition was published in 1982,
by John Wiley & Sons, Inc.

Published in Japan by Asakura Publishing Co., Ltd.

まえがき

ここ数年の間に，大学の学部で偏微分方程式を学ぶ学部学生の数が目に見えて増えてきている．しかも，そのような学生の多くが数学以外の分野の学生であって，彼らの分野においては数学的厳密さより直観の方が重要視されているのである．本書を書くに当たり，私は直観的な考え方を刺激するようにしながら，かつ同時に，数学的な厳密さをあまり失わないよう努めた．数学的に高水準な ε-δ 流の書き方でこの主題を扱うというのが，考えうる一方の極端であるが，このようにすれば，一般には，多くの学部学生にとって何がどうなっているのかわからないということになる．その反対の極端な書き方は，微妙な点を一切捨て去ってしまうことであるが，そうすると学生がわからないだけでなく先生まで何の話をしているのかわからなくなってしまうであろう．私は，この二つの極端な書き方の中間の道をうまく選んで，数学的な考え方を説明して行こうと努めた．

本書は，過去5年間に私が準備してきた講義のノートに基づいてそれをさらに発展させたものである．本書は次の点で普通の教科書とは異なる形をとっている：すなわち，章ごとに区切って話を進めるという普通の形をとらないで，それぞれがほとんど独立した 47 個の“課”を並べるという形をとったことである．

変数分離と積分変換とがここで論じられる最も重要な解析的な手段である．モンテ・カルロ法，変分法，制御理論，ポテンシャル論，積分方程式，というようなあまり標準的でない話題もいくつか論じることにした．それは，たいていの学生が将来いずれは出会うであろうと思ったからである．ここでこれらの話題を学ばなければ，将来彼らはきちんとそれらの話題を学ぶ機会を恐らくもたないであろう．

本書は，低学年でも高学年でも1学期あるいは2学期のコースの教科書とし

て使用することができる．本書の予備知識としては，微積分学と常微分方程式の知識しか仮定していない．たいていの課は，１課当たり１～２日かかるであろうから，標準的な１学期用のカリキュラムの一例としては，課 1～13，15～17，19～20，22～23，25～27，30～32，37～39 を選んで教えるのもよかろう．２学期かければ，問題を解くのに十分な時間をかけながら 47 課すべてを済ませることも難しくない．

本書を書くよう勧誘して下さった Wiley の編集部の方々，本書の査読をしいろいろと助言を与えて下さった Chris Rorres 教授と M. Kursheed Ali 教授に謝意を表したい．本書の改良に役立つ御助言を本書を使った学生や先生から頂ければ大変有難いと存じています．Dorothy，Susan，Alexander，Daisy Farlow にも感謝します．

Stanley J. Farlow

訳者まえがき

弾性体・流体の力学，熱伝導の理論，反応・拡散の理論，電磁気学，等々，偏微分方程式で適切に記述される物理現象は多い——見方によれば物理現象すべてが偏微分方程式によって支配されているともいえる．したがって，工学においても偏微分方程式の知識は重要なものとされて来た．伝統的な数理物理学，工業数学は，一言でいえば，“応用偏微分方程式論”であった．第二次大戦後，新しい応用数学が興隆し，工学・技術の世界では偏微分方程式は“重要な数学分野の一つ”になったとはいえ，計算機の進歩によって大規模な計算が可能になって現実的な問題に対する偏微分方程式を実際に解くことができるようになったため，その有用性は一層大きく認められている．

しかし正直にいって，偏微分方程式の厳密な数学的理論はかなり難しい——あるいは関数解析学の立場からどんどん難しいものになされている．応用家にとって，役に立つ偏微方程式の理論の全貌を学ぶことは，学問の一般的な進歩にもかかわらず——あるいはそのために——ますます困難になって来ているといえないでもない．では一体，応用の立場から本当に偏微分方程式のことを勉強したい人達はどうしたらよいのであろうか；教えなければならない人達はどうしたらよいのであろうか．やはり，ある程度厳密性は犠牲にして物理的直観をまじえつつ，広い範囲をカバーした話題について教え，かつ，学ぶのでなければなるまい．

本書はそのような授業経験を基にして著された書物であり，著者のまえがきにもあるように，教室における授業の雰囲気がよく保たれていて，読みやすく書かれている．各章ばらばらに読んでも小纒まりしているところなどは心憎

い．かなり思い切って乱暴な取り扱いをしてある場所もあるが，それも“落ちこぼれを減らす”効果絶大であると期待される．

やはり，このような書はアメリカでないと作れないとの感が深い．日本にもこのような分野の専門家は多いし，“書く気になれば書ける”人も少なくないであろう．しかし，実際に本を書こうとすると，読者対象のことよりも仲間うちの専門家のことが頭に浮かび，つい細部の厳密性に気を取られて“森を見ず”になりがちで，思い切ってこのような本を書くことができないのではなかろうか．

そういうわけで，本書は表題の通り，物理や工学への応用の立場から偏微分方程式を初めて学ぼうとする者にとっては絶好の書であろう．教える者に対しても多くの指針を与える書であろう．さらに，数学そのものを専門にしようとする者にも，偏微分方程式に対してこんな見方もあるのかという新しい発見を与えるかもしれない．

文章表現の厳密性については原本と調子の合った訳文を作るように努めたつもりではあるが，ときどき“悪い癖”が出て，原文より訳文が“数学的”になっているのではないかと恐れる．

授業の現場的雰囲気を反映させるためか，原著の図や数表（式）にはかなり不正確なものがあったが，それをより正確なものに置き変えても訳書の読みやすさを損うことにはならないと信じて，かなり多くの図を書き直し，数表を計算し直し，式を訂正した．

本書はしばらく入手困難な状況にあったが，このたび誤植訂正も加えて朝倉書店より刊行されることになった．さらに多くの学生諸君に活用していただければ幸いである．

1996 年 11 月

伊理正夫
伊理由美

目　次

第1部　入門　1

第 1 課　偏微分方程式入門　3

第2部　拡散型の問題　11

第 2 課　拡散型の問題（放物型方程式）　13

第 3 課　拡散型問題のいろいろな境界条件　21

第 4 課　熱伝導方程式の導出　30

第 5 課　変数分離　36

第 6 課　非同次境界条件を同次境界条件に変換すること　46

第 7 課　もっと複雑な問題を変数分離で解くこと　52

第 8 課　難しい方程式を簡単な方程式に変えること　61

第 9 課　非同次偏微分方程式の解法（固有関数展開）　66

第 10 課　積分変換（正弦変換と余弦変換）　74

第 11 課　Fourier 級数と Fourier 変換　84

第 12 課　Fourier 変換およびその偏微分方程式への応用　92

第 13 課　Laplace 変換　100

第 14 課　Duhamel の原理　110

第 15 課　拡散問題における対流項 u_x

第3部　双曲型の問題　125

第 16 課　1次元波動方程式（双曲型方程式）　127

第 17 課　波動方程式の D'Alembert 解　133

第 18 課　D'Alembert 解（続）　141

第 19 課　波動方程式に関連した境界条件　150

第 20 課　有限な弦の振動（定常波）　157

第 21 課　梁の振動（4階の偏微分方程式）　165

第 22 課　問題の無次元化　172
第 23 課　偏微分方程式の分類（双曲型方程式の標準形）　179
第 24 課　2 次元と 3 次元の波動方程式（自由空間）　188
第 25 課　有限 Fourier 変換（正弦変換と余弦変換）　196
第 26 課　重ね合わせ（線形システムの屋台骨）　202
第 27 課　1 階の方程式（特性曲線法）　209
第 28 課　非線形 1 階方程式（保存方程式）　217
第 29 課　連立偏微分方程式　227
第 30 課　太鼓の膜の振動（極座標の波動方程式）　235

第 4 部　楕円型の問題　247

第 31 課　ラプラシアン（直観的記述）　249
第 32 課　境界値問題の一般的性質　258
第 33 課　円に対する内部 Dirichlet 問題　266
第 34 課　円環領域における Dirichlet 問題　274
第 35 課　球座標に関する Laplace 方程式（球面調和関数）　284
第 36 課　非同次の Dirichlet 問題（Green 関数）　294

第 5 部　数値解法と近似解法　305

第 37 課　数値解（楕円型の問題）　307
第 38 課　陽的差分法　315
第 39 課　陰的差分法（Crank–Nicolson 法）　323
第 40 課　解析解と数値解　329
第 41 課　偏微分方程式の分類（放物型の方程式と楕円型の方程式）　336
第 42 課　モンテ・カルロ法（入門）　345
第 43 課　偏微分方程式のモンテ・カルロ解　352
第 44 課　変分法（Euler–Lagrange 方程式）　359
第 45 課　偏微分方程式を解くための変分法（Ritz の方法）　368
第 46 課　偏微分方程式を解くための摂動法　376
第 47 課　偏微分方程式の等角写像による解　385

付録　積分変換表　397

索引　408

第 1 部

入　門

第1課　偏微分方程式入門

目的：　偏微分方程式とは何か，偏微分方程式はなぜ役に立つのか，偏微分方程式はどうやって解くのかを示す．また，偏微分方程式の種類や型による分類についてもざっと述べる．後の課で詳しく学ぶいろいろな考え方についても概観する．

流体力学，電気，磁気，力学，光学，熱流，いずれの領域においても，たいていの物理現象は一般に偏微分方程式で記述することができる．実際，たいていの物理数学の問題は偏微分方程式である．考えている偏微分方程式を簡単化して常微分方程式に帰着できることがあることも事実であるが，そのような物理系も完全に記述しようとすれば偏微分方程式の領域に属する問題となる．

偏微分方程式とは何か

偏微分方程式とは偏導関数を含む方程式のことである．未知関数が1個の独立変数だけによる常微分方程式とは異なり，偏微分方程式では未知関数は複数個の独立変数によっている（たとえば温度 $u(x,t)$ は位置 x と時間 t によるというような具合に）．

よく知られた偏微分方程式の例をいくつか挙げてみよう．記号を簡略化するために以下のような記号をこれから使う．

$$u_t=\frac{\partial u}{\partial t}\qquad u_x=\frac{\partial u}{\partial x}\qquad u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdots\cdots$$

よく知られた偏微分方程式の例

$u_t=u_{xx}$（1次元熱伝導方程式）

$u_t=u_{xx}+u_{yy}$（2次元熱伝導方程式）

$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$（極座標表示の Laplace（ラプラス）方程式）

$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$（3次元波動方程式）

$u_{tt}=u_{xx}+\alpha u_t+\beta u$（電信方程式）

上の例に対する注意

未知関数 u は常に2個以上の変数の関数である．微分される方の変数 u を**従属**変数と呼び，微分する方の変数を**独立**変数と呼ぶ．たとえば，方程式

$$u_t=u_{xx}$$

においては，従属変数 $u(x,t)$ が二つの独立変数 x と t の関数であり，方程式

$$u_t=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

では $u(r,\theta,t)$ は三つの独立変数 r,θ,t の関数である．

偏微分方程式はなぜ役に立つのか

物理学におけるたいていの**自然法則**，たとえば，Maxwell（マックスウェル）の方程式，Newton（ニュートン）の冷却法則，Navier–Stokes（ナヴィエ・ストークス）の方程式，Newton の運動方程式，量子力学の Schrödinger（シュレーディンガー）方程式などは偏微分方程式によって表されている（あるいはそのように表すことができる）．すなわち，これらの法則は，物理現象を**空間微分と時間微分の間の関係**という形で記述している．これらの方程式に導関数が現れるのは導関数が自然な概念（速度，加速度，力，摩擦，磁束，電流のような）を表すからである．このようにして，われわれの求めたいある未知量の偏導関数に関する方程式が得られるのである．

本書の目的は読者に次の二つのことを示すことである．

1. 物理の問題をどのようにして偏微分方程式の形に定式化するか（すなわち，数学モデルの構成法）．
2. 偏微分方程式（初期条件，境界条件も含めて）をいかにして解くか．

問題の定式化の話は数課あと回しにして，まず偏微分方程式の解き方についてざっと眺めることにする．

偏微分方程式はどうやって解くのか

これはよい質問である．実際家が使える手法集がすでにある．その最も重要なのが偏微分方程式を常微分方程式に変える方法である．実際に役立つ方法10種を挙げると次の通りである．

1. 変数分離　n 変数の偏微分方程式を n 個の常微分方程式に変える方法．
2. 積分変換　n 個の独立変数の偏微分方程式を $n-1$ 変数の偏微分方程式に変える手順．したがって，2変数の偏微分方程式は常微分方程式に変えることができる．
3. 座標変換　取り扱う問題の座標を変換すること（座標軸を回転すること，など）によって，元の偏微分方程式を常微分方程式あるいはもっと取り扱いやすい別の偏微分方程式に変える方法．
4. 従属変数の変換　偏微分方程式に含まれる未知関数を，求めやすい新しい未知関数に変換する方法．
5. 数値計算　偏微分方程式を連立差分方程式に変え，計算機を使って反復法で解く方法．可能な方法がこれしかないような場合も多い．偏微分方程式を差分方程式で置き変える方法の他に，多項式関数の形の近似解（スプライン関数近似，など）を求める方法もある．
6. 摂動法　非線形問題の解法を，一連の線形問題の解法に変える方法．
7. インパルス応答法　問題の初期条件と境界条件を単純なインパルスの形に分解し，各インパルスに対する応答を求める手法（線形な問題に対してのみ有効）．これらの応答を加え合わせることにより全体の応答が求められる．
8. 積分方程式　偏微分方程式を**積分方程式**（積分の中に未知関数が含まれる形の方程式）に変える方法．積分方程式はまたいろいろな方法で解かれる．
9. 変分法　最小化問題の形に方程式を書き直して，偏微分方程式の解を求める方法．ある式（全エネルギーを表す式であることが多い）の最小値が偏微分方程式の解になっていることが多い．
10. 固有関数展開　偏微分方程式の解を固有関数の無限和の形で求める方法．これらの固有関数は元の問題に対応するいわゆる固有値問題を解くことにより求められる．

偏微分方程式の種類

偏微分方程式はいろいろな基準によって分類される．分類が重要なのは，一般的な理論や解法はある特殊な型の方程式に対してしか適用できないのが普通だからである．基本分類基準は次の6通りである．

1. 偏微分方程式の階数　方程式中の偏導関数の最高次数を偏微分方程式の階数という．たとえば，

$$u_t = u_{xx} \quad \text{は2階}$$
$$u_t = u_x \quad \text{は1階}$$
$$u_t = uu_{xxx} + \sin x \quad \text{は3階}$$

2. 独立変数の個数　たとえば，

$$u_t = u_{xx} \quad \text{は2変数}(x\text{と}t)$$
$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \quad \text{は3変数}(r\text{と}\theta\text{と}t)$$

3. 線形性　偏微分方程式は線形か非線形かである．線形偏微分方程式というのは，従属変数 u とその導関数が方程式の中にすべて線形で現れる（たとえば，それらの積とか2乗とかが方程式の中に現れることはない）もののことである．より正確にいうと，**2階の2変数線形偏微分方程式**は次のような形をしている．

(1.1)★
$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

ここで A, B, C, D, E, F, G は定数あるいは与えられた独立変数 x, y の関数である．たとえば，

$$u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin t \quad \text{は線形}$$
$$uu_{xx} + u_t = 0 \quad \text{は非線形}$$
$$u_{xx} + yu_{yy} = 0 \quad \text{は線形}$$
$$xu_x + yu_y + u^2 = 0 \quad \text{は非線形}$$

4. 同次性　方程式(1.1)は右辺 $G(x, y)$ があらゆる x, y に対して恒等的に0であるとき**同次**であるという．$G(x, y)$ が恒等的には0でないとき方程式は**非同次**であるという．

5. 係数の種類　式(1.1)の係数 A, B, C, D, E, F が定数であるとき，(1.1)は**定数係数**であるという（それ以外のときは変数係数であるという）．

6. 線形方程式の三つの基本型　線形偏微分方程式 (1.1) は次の三つの型のいずれかである：

（a）　放物型

（b）　双曲型

（c）　楕円型

放物型　**放物型方程式**は熱流や拡散の過程を記述するもので，$B^2-4AC=0$ を満たす．

双曲型　**双曲型方程式**は振動や波動を記述するもので，$B^2-4AC>0$ を満たす．

楕円型　**楕円型方程式**は定常状態の現象を記述するもので，$B^2-4AC<0$ を満たす．

例

（a）　$u_t=u_{xx}$　　$B^2-4AC=0$　　は放物型

（b）　$u_{tt}=u_{xx}$　　$B^2-4AC=4$　　は双曲型

（c）　$u_{\xi\eta}=0$　　$B^2-4AC=1$　　は双曲型

（d）　$u_{xx}+u_{yy}=0$　　$B^2-4AC=-4$　　は楕円型

（e）　$yu_{xx}+y_{yy}=0$　　$B^2-4AC=-4y$　$\begin{cases} y>0 \text{ のとき楕円型} \\ y=0 \text{ のとき放物型} \\ y<0 \text{ のとき双曲型} \end{cases}$

(変数係数のときは各点で状況が変わる．)

注意

1. 一般に，B^2-4AC は独立変数の関数である．したがって，方程式は定義域において，ある基本型から他の基本型に変わることがありうる（あまりそういうことはないが）．
2. 線形方程式の一般形 (1.1) は独立変数を x, y として書いてあるが，2変数のうちの一つが時間で，したがって変数が x と t であるような問題も多い．
3. 一般的な分類図を図 1.1 に示す．

線形性	線形	非線形					
階数	1	2	3	4	5	...	m
係数の種類（線形方程式）	定数	変数					
同次性（線形方程式）	同次	非同次					
変数の個数	1	2	3	4	5	...	n
基本型（線形方程式）	双曲型	放物型	楕円型				

図 1.1 偏微分方程式の分類図

練習問題

1. 次の方程式は図 1.1 のどこに分類されるか．
   (a) $u_t = u_{xx} + 2u_x + u$
   (b) $u_t = u_{xx} + e^{-t}$
   (c) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = \sin x$
   (d) $u_{tt} = uu_{xxxx} + e^{-t}$
2. 偏微分方程式 $u_t = u_{xx}$ の解を何個見いだせるか． $u(x, t) = e^{ax+bt}$ という形をしている解を試してみよ．
3. $u_1(x, y)$ と $u_2(x, y)$ がそれぞれ方程式 (1.1) を満たすとき，その和も式 (1.1) を満たすといえるか．もしそうなら，それを証明せよ．
4. 偏微分方程式の中で最も解きやすいものは，恐らく，方程式

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0$$

であろう．この方程式を解くことができるか．（この方程式を満たすすべての関数 $u(x, y)$ を求めよ．）

5. 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}=0$$

についてはどうか．この方程式のすべての解を求めることができるか．（どのくらいたくさんあるか．）上の偏微分方程式と常微分方程式

$$\frac{d^2 y}{d x^2}=0$$

とでは，解の個数がどのくらい異なるか．

参考書

1. P. W. Berg, J. L. McGregor, *Elementary Partial Differential Equations*, Holden-Day, 1966. 書き方がはっきりしていて，良い問題がいくつも挙げられている．持っていて損のない良書である．
2. R. L. Street, *Analysis and Solution of Partial Differential Equations*, Brooks/Cole, 1973. 本書で取り上げる話題も多く含んでいる良書.

第2部

拡散型の問題

第2課　拡散型の問題(放物型方程式)

目的：　熱流や拡散型の問題のモデルとして放物型偏微分方程式をどのように使うかを示すこと．いろいろな項（u_t, u_x, u_{xx}, u など）の物理的意味を説明し，放物型方程式の例を二三挙げる．

初期値・境界値問題の考え方を一つの例に沿って導入する．放物型の問題に対する直観的な感じを読者につかんでもらうことがこの課の主な目標の一つである．

まず最初に，簡単な物理の問題を一つ取り上げて，それが数学モデル（偏微分方程式を含む）によってどのように記述できるかを示す．次に問題を複雑化して，新しい状況を記述する新しい偏微分方程式を示す．この課の偏微分方程式を導き出したり解いたりすることはここではしないで，後の課に譲ることにする．

簡単な熱流の実験

次のような簡単な実験をいくつかの段階に分けて行うと想像してみよう．

〈ステップ 1〉　まず，十分に長い（たとえば長さ $L=2\,\mathrm{m}$ の）直径 $2\,\mathrm{cm}$ の棒（たとえば銅の棒）を選び，その側面（両端を除く）に絶縁体を巻きつける．内側に絶縁物を詰めた銅の管材を使ってもよい．要するに，熱は棒の端からだけ流入・流出し，側面の境界からは出入りできないようにしておく．

〈ステップ 2〉　次に，温度が十分長い時間ある温度 T_0 に保たれているような環境にこの棒を置き，この棒全体が周囲と同じ定常状態の温度になるようにする．簡単のため，周囲の温度を $T_0=10℃$ とする．

〈ステップ 3〉　$t=0$ のときこの環境から棒を取り出し，棒の両端に二つの熱源をつける．その目的は，棒の端を特定の温度 T_1 および T_2（たとえば $T_1=0℃$，$T_2=50℃$）に保つことである．いいかえれば，二つの自動温度調節装

置が絶えず棒の両端の温度を監視し，温度が上記の値 T_1 および T_2 と異なるとただちに強力な加熱（冷却）装置が作動して温度を調節する．図 2.1 にそのような実験装置を示す．

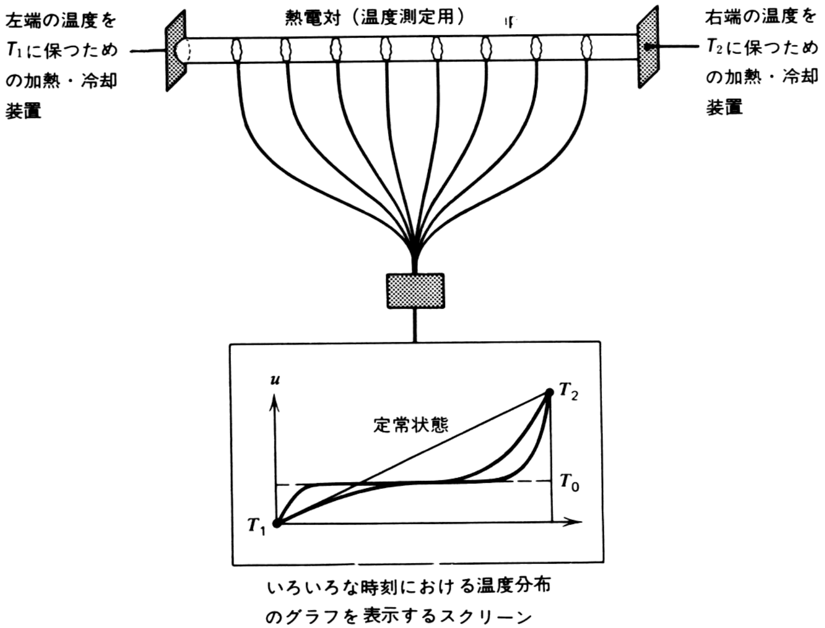


図 2.1　熱流実験の模式図

〈ステップ 4〉 棒の温度分布を適当な表示装置で監視する．（この種の実験にどういう意義があるかはまた別の問題である．このことについては後で述べる．）

これで実験についての話は終わりである．この課の主目的は，この物理の問題（およびその変形）が放物型偏微分方程式でどのように説明される（モデル化される）かを示すことである．

熱流実験の数学モデル

上の物理の問題を記述するには 3 種の式が必要である：

1．熱流の物理現象を記述する偏微分方程式

2. この問題の境界における物理的性質を記述する境界条件
3. 実験開始時における物理的な現象を記述する初期条件

熱伝導方程式

1次元熱流の基本方程式，すなわち

(2.1)★　偏微分方程式　$u_t = \alpha^2 u_{xx}$　$(0<x<L, \quad 0<t<\infty)$

は,

u_t＝温度の時間変化率（単位は K/s)

と

u_{xx}＝温度分布 $u(x,t)$ のへこみの度合
（ある点の温度をその近傍点の温度と比べたもの）

との間の関係をつけるものである．後の課でこの式を基本的な熱量保存の方程式から導出するが，当面この方程式自身の性質を調べてみることにする．この式は，（棒の上のある点 x のある時刻 t における）温度 $u(x,t)$ が，u_{xx} が正であるかあるいは負であるかに従って増加する（$u_t>0$）かあるいは減少する（$u_t<0$）かであるということを述べているに過ぎない．図 2.2 は棒に沿ったいろいろな点での温度変化の様子を図示している．

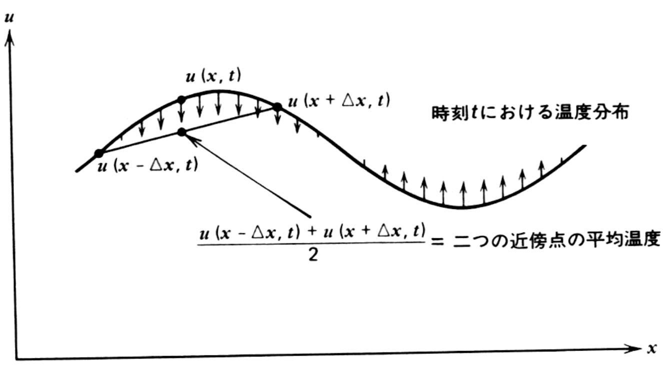


図 2.2　$u_t=\alpha^2 u_{xx}$ に従う温度変化を表す矢印

どうして u_{xx} が熱流を測っていると解釈できるのかを示すために，u_{xx} を次のような差の商で近似してみよう：

$$u_{xx}(x,t)\cong\frac{1}{\varDelta x^2}[u(x+\varDelta x,t)-2u(x,t)+u(x-\varDelta x,t)]$$

これは

$$u_{xx}(x,t)\cong\frac{2}{\varDelta x^2}\left[\frac{u(x+\varDelta x,t)+u(x-\varDelta x,t)}{2}-u(x,t)\right]$$

のように書き直せるから，次のような u_{xx} の解釈が得られる．

1. 温度 $u(x,t)$ が二つの近傍点の温度の平均より小さければ，$u_{xx}>0$ である（この場合，x へ流入する総熱流は正である）．
2. 温度 $u(x,t)$ が二つの近傍点の温度の平均に等しければ，$u_{xx}=0$ である（この場合，x へ流入する総熱流は零である）．
3. 温度 $u(x,t)$ が二つの近傍点の温度の平均より大きければ，$u_{xx}<0$ である（この場合，x へ流入する総熱流は負である）．

図2.2にはこのことが模式的に描いてある．いいかえれば，ある点 x の温度がその両側の近傍の点 $x-\varDelta x$ および $x+\varDelta x$ の温度の平均より大きければ，x の温度は減少することになる．そして，その減少速度 u_t は正確にはこの差に比例するというわけである．比例定数 α^2 は物質に固有のものである．この定数については，この先の二三課でさらに論じることにする．

境界条件

すべての物理の問題には何らかの境界があるといってよい．したがって，問題を適切に記述するためには境界で何が起きているかを数学的に記述しなければならない．われわれの実験では境界条件は大変簡単である．すべての時刻 $t>0$ において，二つの端点 $x=0$ および $x=L$ での温度を T_1 および T_2 にそれぞれ固定しておいたから，単に，

(2.2)★ 境界条件： $$\begin{cases}u(0,t)=T_1\\u(L,t)=T_2\end{cases}\qquad(0<t<\infty)$$

としておけばよい．

初期条件

すべての物理の問題は時刻のある値（$t=0$ と呼ぶのが普通である）から始まるはずである．したがって，この時刻において状況がどうなっているかを明確にしておかなければならない．われわれの実験では，棒の温度がある一定の

温度 T_0 に達したときから棒の温度を監視し始めたから，

(2.3)★　　　初期条件：　$u(x,0)=T_0 \quad (0 \leqq x \leqq L)$

である．

これで，われわれの実験の数学的記述は終わった．式 (2.1)，(2.2)，(2.3) をまとめて書けば，初期値・境界値問題と呼ばれるものが得られる：

$$
\text{(2.4)} \quad
\begin{array}{lll}
\text{偏微分方程式} & u_t=\alpha^2 u_{xx} & (0<x<L,\quad 0<t<\infty) \\
\text{境界条件} & \begin{cases} u(0,t)=T_1 \\ u(L,t)=T_2 \end{cases} & (0<t<\infty) \\
\text{初期条件} & u(x,0)=T_0 & (0 \leqq x \leqq L)
\end{array}
$$

ここで面白いことは——明らかでは決してないが——問題 (2.4) を満たす関数 $u(x,t)$ が唯一つ存在するということである．そして，それが棒の温度を表すことになる．したがって，とりあえずのわれわれの目標は，(2.4) の唯一の解 $u(x,t)$ を求めることである．

この課を終える前に，この基本問題の変形について少し話をしよう．まず，熱伝導方程式 $u_t=\alpha^2 u_{xx}$ の二三の変形から始めよう．

拡散型方程式（続）

側面から温度差に比例する熱損失がある場合

方程式

$$u_t=\alpha^2 u_{xx}-\beta(u-u_0)$$

は，棒に沿っての拡散 $\alpha^2 u_{xx}$ と棒の側面からの熱の流出（あるいは流入）との両方がある場合の棒の熱流を記述している．熱損失すなわち熱の流出（$\beta(u-u_0)>0$）あるいは熱の流入（$\beta(u-u_0)<0$）は，棒の温度 $u(x,t)$ と周囲の媒質の温度 u_0 との差に比例する（比例定数が β）．α^2 に比べて β が非常に大きいときは，棒に沿っての前後の熱の流れは側面を横切っての熱の流れに比べて小さいことになる．したがって，熱は近似式 $u_t=-\beta(u-u_0)$ に従って（各点ごとに）側面を横切って流れ出るであろう．

化学においては u が濃度を表すような現象がある．このとき，式

$$u_t=\alpha^2 u_{xx}-\beta(u-u_0)$$

は，物質濃度の変化率 u_t が（x 方向の）拡散による項 $\alpha^2 u_{xx}$ と，化学反応により二つの濃度 u と u_0 の差に比例して物質が生成される（$\beta<0$）あるいは崩壊する（$\beta>0$）という事実による項とから成っていることを物語っている．

内部に熱源がある場合

非同次方程式

$$u_t=\alpha^2u_{xx}+f(x,t)$$

は，（棒の各点 x，各時刻 t において）$f(x,t)$ だけの内部熱源が棒に与えられている場合に対応する．電流が流れる導線が棒の中を通っていて，その抵抗により一定の発熱 $f(x,t)=K$ があるというような場合を想像してみてもよい．

対流と拡散とがある場合（拡散・対流方程式）

速度 v で流れる流れの中を汚染物質が運ばれていく様子を考えよう．物質の濃度 $u(x,t)$ が場所 x（流れに沿っての距離で，下流方向を正とする）と時刻 t との関数として変化することは明らかである．このとき，変化率 u_t は拡散・対流方程式

$$u_t=\alpha^2u_{xx}-vu_x$$

で定められる．α^2u_{xx} の項が拡散の影響を表し，$-vu_x$ が対流の成分，すなわち流れによって物質が運ばれることによる濃度変化を表す．汚染物質が主に拡散するのか対流で運ばれるのかは二つの係数 α^2 と v との相対的な大きさによる．煙突から立ち上る煙を見たことがあるであろう．この場合，煙の粒子は暖い空気とともに上の方に対流で運ばれ，それと同時に空気の流れの中で拡散して行く．

熱伝導方程式には以上のような変種があるが，その他，棒の境界条件をいろいろな物理的状況に応じて変更することもできる．第3課では，そのような変更について述べよう．

注意

係数 $\alpha(x)$ が定数でなく場所の関数であるような熱伝導方程式 $u_t=\alpha^2(x)u_{xx}$ は，棒の内部の拡散が x に依存する（すなわち材質が均質でない）問題に相当する．たとえば，銅と鋼の板を隣り合わせて置き（図 2.3 参照），銅板の左側を $u(0,t)=0℃$ に固定し，鋼板の右側を $u(L,t)=20℃$ に固定すると，熱流を表す偏微分方程式は

$$u_t=\alpha^2(x)u_{xx}\quad(0<x<L)$$

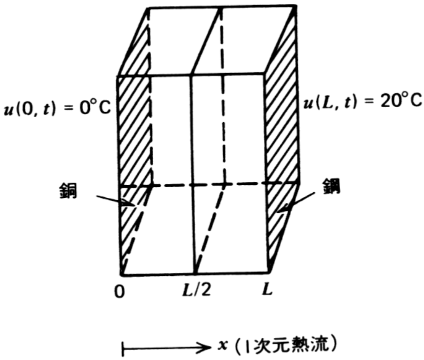


図 2.3

$$\alpha(x)=\begin{cases}\alpha_1\ (\text{銅の拡散係数}) & \left(0<x<\dfrac{L}{2}\right)\\ \alpha_2\ (\text{鋼の拡散係数}) & \left(\dfrac{L}{2}<x<L\right)\end{cases}$$

となる.

練習問題

1. 棒の温度の初期値が

$$u(x,0)=\sin \pi x \quad (0\leqq x\leqq 1)$$

で境界条件が

$$u(0,t)=0$$
$$u(1,t)=0$$

であるとき，その後の時刻における棒の温度 $u(x,t)$ はどうなるか.

ヒント　熱伝導方程式 $u_t=\alpha^2u_{xx}$ の物理的解釈を使え.

2. 棒がある一定の内部熱源をもつとする．すなわち，棒の内部の熱流を表す基本方程式が

$$u_t=\alpha^2u_{xx}+1 \quad (0<x<1)$$

であるとする．また，両境界での温度は $u(0,t)=0$, $u(1,t)=1$ に固定しておくとする．棒の定常状態での温度分布はどうなるか．すなわち，温度 $u(x,t)$ は時間に関係のない温度分布 $U(x)$ に収束するか.

ヒント　$u_t=0$ とおいて，その温度をグラフに描いてみるとよい．また，温度の初

期値を零として，それからの温度分布の形をいくつか描け．

3. 側面からの熱の出入りもある金属棒の温度が方程式

$$u_t=\alpha^2 u_{xx}-\beta u \quad (0<x<1)$$

に従うものとし，また，棒の両端の温度は $u(0,t)=1$, $u(1,t)=1$ に保たれているとする．棒の定常状態での温度を求めよ（そのグラフを描け）．この問題で，熱はどこをどのように流れているか．

4. 側面が絶縁された長さ $L=1$ の金属棒の温度の初期値が $\sin(3\pi x)$ で，左端と右端が温度 0℃ と 10℃ に固定されている．この問題を記述する初期値・境界値問題はどうなるか．

参考書

1. A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, MacMillan, 1963. 百科事典的な情報集である．良い例題，問題がたくさん含まれている．

第3課　拡散型問題のいろいろな境界条件

目的：　熱流および拡散型の問題にはいろいろな境界条件が現れることを示し，フラックス（流束）という重要な概念を導入すること．

ここで取り扱う境界条件の主な型は次の三つである：

1. $u=g(t)$（境界の温度が与えられている）
2. $\dfrac{\partial u}{\partial n}+\lambda u=g(t)$（周囲の媒質の温度が与えられている；$n$ は境界の外向き法線）
3. $\dfrac{\partial u}{\partial n}=g(t)$（境界をよぎる熱流が与えられている）

熱流の問題に登場するいろいろな型の境界条件について述べるとき，普通に考えられるのは三つの基本的な型である．第3課ではこれら3種の境界条件を論じ，それらの境界条件に対応する実験の例を挙げる．

第1の型の境界条件（境界の温度が与えられている場合）

図3.1に示すような1次元の棒の中の熱流を考えよう．棒の両端の温度は，それぞれ，与えられた温度曲線 $g_1(t)$ および $g_2(t)$ に従うものとする．

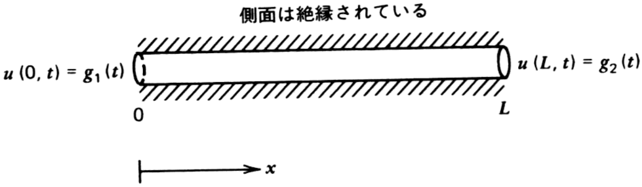


図 3.1　境界の温度が与えられている場合

前課で述べたように，棒の端を指定された温度に保つ装置は，両端にサーモスタットをつけてさらに温度を調整するための加熱（あるいは冷却）装置をつ

けることが必要である．そのような境界条件の問題はかなり普通のものである．棒の内部の温度が望ましい形になるようにするには，境界温度 $g_1(t)$ および $g_2(t)$ をどのように制御したらよいかを決めることが問題の最終目標になっている場合もある．製鉄業では，炉内の金属の温度を時間とともにある変化をさせながら，かつ，炉内での温度がなるべく一様である，すなわち炉内の点での温度勾配がなるべく小さくなるように境界温度を制御する必要がしばしばある．

似たような型の境界条件は，より高い次元の領域，たとえば2次元領域，に対しても適用可能である．たとえば，境界温度が極座標で

$$u(R,\theta,t)=\cos t\sin\theta$$

と与えられているときに（半径Rの）円板の内部の温度を求めるという興味ある問題を考えてみてもよい．図3.2を見よ．

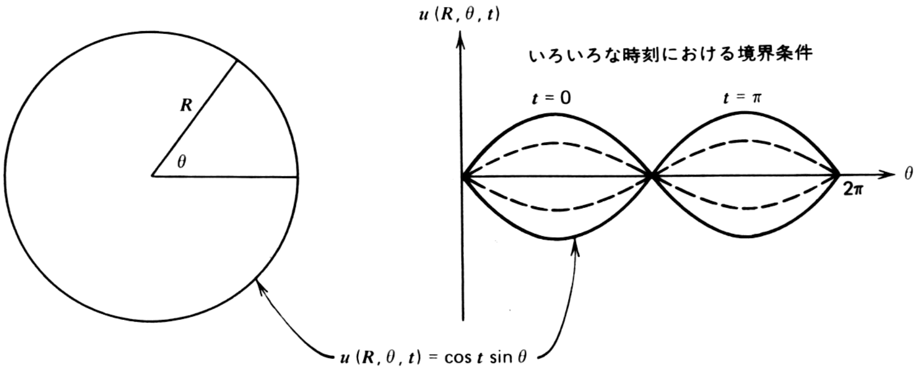


図 3.2　境界温度が振動する場合

もちろん，この実験を開始するには初期温度が与えられていなければならない．しかし，この場合，初期条件の影響はごく短時間の後に消えてしまい，円板内部の温度は境界温度にしか依存しなくなるであろう．

第2の型の境界条件（周囲の媒質の温度が与えられている場合）

ここでもまた，側面を絶縁した銅の棒を考えよう．ただし，今度は，二つの境界の温度 $g_1(t)$，$g_2(t)$ が与えられるのではなくて，温度が $g_1(t)$，$g_2(t)$ の周囲の媒質に棒の両端を接触させるだけにする．いいかえれば，棒の左端を時

間とともに変化する温度 $g_1(t)$ の液体を入れた容器の中に入れ，右端を温度 $g_2(t)$ のもう一つの液体に入れる（図 3.3).

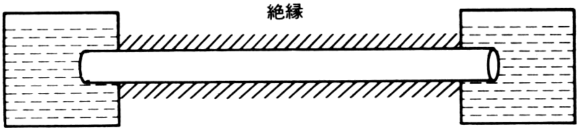


図 3.3　境界での対流冷却

このような型の境界条件では，棒の両端の温度が液体の温度 $g_1(t)$，$g_2(t)$ に等しくなるとはいえないが，棒の一つの端の温度がそこの液体の温度より低いときには，その温度差に比例して熱が棒に流れ込むということはわかる (Newton（ニュートン）の冷却の法則)．すなわち，両端が $x=0$ および $x=L$ であるような1次元の棒については，Newton の冷却の法則は

$$(3.1)\qquad \begin{cases}(x=0 \text{ における}) \text{ 外向き熱流束}=h[u(0,t)-g_1(t)] \\ (x=L \text{ における}) \text{ 外向き熱流束}=h[u(L,t)-g_2(t)]\end{cases}$$

である．ここで，h は**熱交換係数**といい，境界面を通して温度差1単位あたり毎秒何ジュール（あるいはカロリー）の熱の流れがあるかを示す尺度である．また，**外向きの熱流束（フラックス）**とは棒の端をよぎる毎秒の熱のジュール数である．棒の温度が周囲の媒質の温度より高いときに両端の外向きの熱流束が正となることに注意せよ．式 (3.1) と Fourier（フーリエ）の冷却の法則とを組み合わせると，われわれの境界条件に到達する．Fourier の法則は，外向きの熱流束の第2の表現を与えるものである（第1の表現が (3.1))．これら二つの表現を等しいとおくことによって，われわれの境界条件が得られる．まず Fourier の法則を述べておく．(これは実験的に証明されている.)

(3.2)★　物体のある断面をよぎる外向きの熱流束は，その断面における内向き法線方向の導関数に比例する．

この法則が述べていることは，「(図 3.4 の) D の境界から外向きの方向に温度が急激に増加するなら熱は周囲の媒質から領域 D の中へ流れる」ということである．

われわれの1次元の問題では，Fourier の法則は次のような形になる：

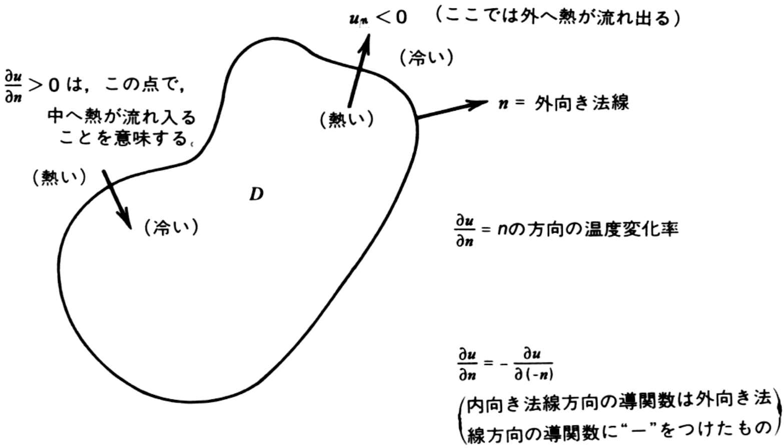


図 3.4　Fourier の法則の説明

(3.3)
$$\begin{cases}(x=0\ \text{における})\ \text{外向きの熱流束}=k\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}\\[2ex](x=L\ \text{における})\ \text{外向きの熱流束}=-k\dfrac{\partial u(L,t)}{\partial x}\end{cases}$$

ここで，k は金属の**熱伝導度**といい，物質がどのくらいよく熱を伝えるかの尺度である.（ほとんど熱を伝えない物質は零に近い値をとり，一方，銅とかアルミニウムは大きい値をとる.）

Fourier の法則 (3.3) は棒の内部至るところで（ちょうど端点のところは除いて）実際に成り立つ．たとえば，

(3.4)★
$$\text{（左から右へ）}\ x_0\ \text{をよぎる熱流束}=-k\frac{\partial u(x_0,t)}{\partial x}$$

図 3.5 を見よ．Fourier の法則 (3.4) によれば，$u_x(x_0,t)<0$ なら熱は左から右へ流れ，$u_x(x,t)>0$ なら点 x_0 を通過する熱の流れは右から左になる（熱は必ず温度の高いところから低いところへ流れる).

このようにして，熱流束についての二つの式 (3.1) および (3.3) を使って，図 3.3 の実験に対して求める境界条件の数学的な形が得られる．すなわち，

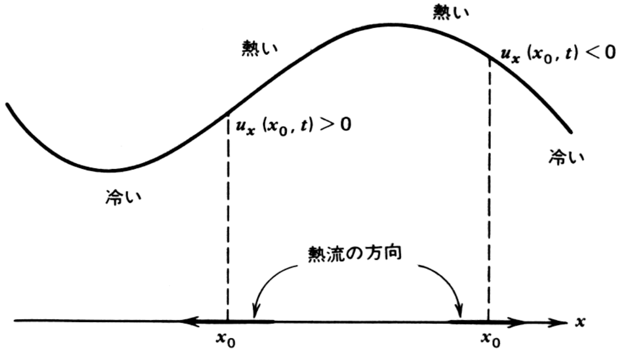


図 3.5　Fourier の法則のもう一つの説明

$$\text{境界条件}\begin{cases}\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\dfrac{h}{k}[u(0,t)-g_1(t)] \\ \dfrac{\partial u(L,t)}{\partial x}=-\dfrac{h}{k}[u(L,t)-g_2(t)]\end{cases}\quad(0<t<\infty)$$

定数 h/k のことをよく単に λ と書く．そうすると，棒の端をよぎる熱の流れに対する境界条件は

$$u_x(0,t)=\lambda[u(0,t)-g_1(t)]$$
$$u_x(L,t)=-\lambda[u(L,t)-g_2(t)] \tag{3.5}$$

となる．

高次元でも似たような境界条件が考えられる．たとえば，円板の境界が温度 $g(\theta,t)$ の動く流体に接触しているなら，境界条件は

$$\frac{\partial u(R,\theta,t)}{\partial r}=-\frac{h}{k}[u(R,\theta,t)-g(\theta,t)]$$

となる．ここで $\dfrac{\partial u}{\partial r}(R,\theta,t)$ は，u の外向き法線方向（正の r 方向）の導関数の境界上の点 (R,θ) における値を表す．この種の境界条件は線形境界条件と呼ばれる（u と u_r について線形であるから）．しかし，右辺に $g(\theta,t)$ という項があるから，これは非同次な条件である．

第3の型の境界条件（熱流束が与えられている場合――端が絶縁されている場合も特殊な場合として含む）

絶縁された境界というのは，いかなる熱の流れの通過も許さないような境界のことである．したがって，（内向きあるいは外向きの）法線方向の導関数は境界上で零でなければならない（垂直な導関数は熱流束に比例するから）．1次元の棒で $x=0$ および $x=L$ に絶縁された端がある場合には，境界条件は

$$\begin{aligned} u_x(0,t)&=0 \\ u_x(L,t)&=0 \end{aligned} \quad (0<t<\infty)$$

となる．

2次元の領域の場合，絶縁された境界というのは，境界での温度の法線方向の導関数が零であることを意味する．たとえば，円板が境界で絶縁されているときには，境界条件はすべての $0\leqslant\theta<2\pi$ とすべての $0<t<\infty$ に対して $u_r(R,\theta,t)=0$ となる．

一方，この円板の境界をよぎって入ってくる熱の量が与えられているときには，境界条件は

$$u_r(R,\theta,t)=f(\theta,t)$$

となる．ここで $f(\theta,t)$ は円板の外の熱源から円板の中へ入ってくる熱量を表す．

さて，このような種々の型の境界条件の例を挙げよう．

1次元熱流の典型的な境界条件

長さ 2 m の銅の棒の側面が絶縁され，初期温度が 0℃ であるとする．棒の上の端（$x=0$）は絶縁されており，下の端（$x=2$）は一定温度 $g_2(t)=20$℃ の流水の中に沈められている（図 3.6）．

次の四つの式がこの問題に対する数学モデルとなる：

$$\text{偏微分方程式}\quad u_t=\alpha^2u_{xx}\quad (0<x<2,\ 0<t<\infty)$$

$$(3.6)\qquad \text{境界条件}\quad \begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(2,t)=-\dfrac{h}{k}[u(2,t)-20] \end{cases} \quad (0<t<\infty)$$

$$\text{初期条件}\quad u(x,0)=0\quad (0\leqslant x\leqslant 2)$$

ここで

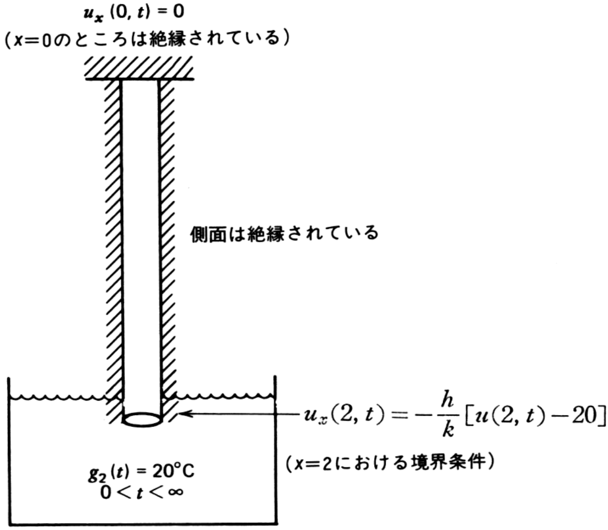


図 3.6　初期値・境界値問題

$$\alpha^2 = 1.16\times10^{-4}\ \mathrm{m^2/s}\quad（銅の熱拡散率）$$
$$k = 3.89\times10^2\ \mathrm{J/m\cdot s\cdot K}\quad（銅の熱伝導度）$$
$$h = 熱交換係数$$

この h を定めること自身，難しい問題である．棒の底面と周囲の水との間で熱がやりとりされる割合を示し，水がどのくらい速く循環するかとか，接触面の性質とか，その他いろいろなものの関数である．この値を定めるには，実験をやらなければならないであろう．

注意

1. 図 3.7 に，一つの典型的な正方形内部の熱流の問題を示す．この問題では，正方形内部の初期温度 $u(x, y, 0)$ $(t=0)$ を与えると，その後引続いて図に示す偏微分方程式と境界条件が $0<t<\infty$ においてずっと成り立ち，それによって以後の温度 $u(x, y, t)$ が決まる．しかし，温度分布がどのようなものであっても，図 3.7 の境界条件は満たさなければならない．

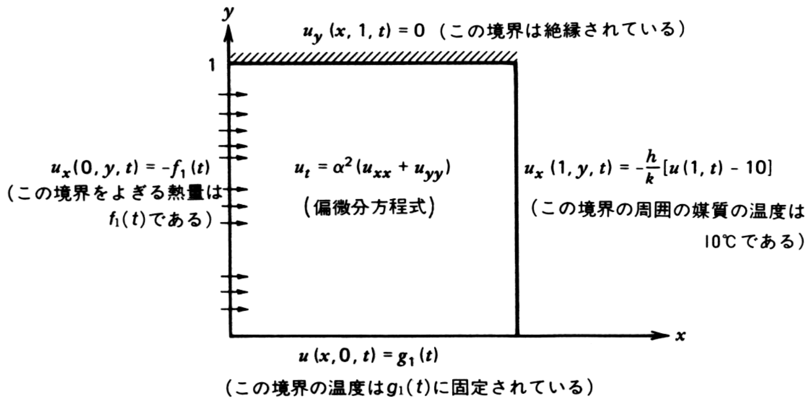


図 3.7　正方形内部の拡散問題に対する典型的な境界条件

2. 円周上の境界条件

$$u_r(R, \theta, t) = -\frac{h}{k}[u(R, \theta, t) - g(\theta, t)]$$

からは境界の温度が $g(\theta, t)$ であることにはならないが，熱交換係数 h が大きいときには実質的には境界の温度 $u(R, \theta, t)$ が $g(\theta, t)$ とほとんど等しいということになる．

練習問題

1. 初期値・境界値問題 (3.6) の解のいろいろな時刻における概形を描け．その概形は境界条件を満たしているか．棒の定常状態の温度分布はどうなるか．直観的には，それは明らかか．
2. 次の初期値・境界値問題はどう解釈できるか．

偏微分方程式　$u_t = \alpha^2 u_{xx}$　$(0 < x < 1,\ 0 < t < \infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) = 1 \end{cases}$　$(0 < t < \infty)$

初期条件　$u(x, 0) = \sin(\pi x)$　$(0 \leqq x \leqq 1)$

いろいろな時刻における解の概形を描くことができるか．温度分布は定常になるか．そのことは明らかか．

3. 次の問題の物理的意味は何か。

偏微分方程式　$u_t=\alpha^2 u_{xx}$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(1,t)=0 \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=\sin(\pi x)$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$

いろいろな時刻における解の概形が描けるか．定常状態の温度についてはどうか．

4. 側面が絶縁されていない金属棒の初期温度が 20℃ で，その後直ちにその一端を 50℃ に固定するものとする．棒の残りの部分を温度 30℃ の溶液の中に沈める．この問題を表す初期値・境界値問題はどうなるか．

参考書

1. H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, 1959. 多くの物理の問題の境界条件を論じた優れた参考書である．

2. C. S. Peskin, *Partial Differential Equations in Biology*, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1976. 神経細胞，内耳，心臓の血管組織のような生物現象の偏微分方程式によるモデル化がなされている．

第 4 課　熱伝導方程式の導出

目的：　熱量保存の法則から 1 次元の熱伝導方程式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t)$$

を導き出す方法を示すこと．熱伝導度，熱容量，密度などの物理的概念を論じ，熱が伝わる速度がこれら三つの基本的な物理パラメータにどのように依存するかを示す．基本的な熱伝導方程式の二三の変形についても論じる．

どんな科学の分野においても，まず一組の仮定を自明なものと認めてそこから出発して，それらを基にして他のすべての概念を導き出す．もちろん，ある人にとって自明なことも他の人には疑わしい点があるということもあろう．科学の歴史は，誰もが同意できる出発点に到達しようとして，基本となる公理をどんどんとより根本的なものへと遡って来た歴史でもある．

たとえば，ある人が一つの基本的な仮定——たとえばそれを仮定 B としよう——から関連ある事実がすべて導き出せると考えたとする．その人は，仮定 B から定理 C を証明し，そしてそれから定理 D を証明し，そしてさらに次々と他の定理が証明されたとする（図 4.1）．もちろんこれは科学の進歩である．すなわち，新しい結果がたくさん証明されればされるほど，物理学，化学，生物学は皆このように前進する．

? ⟶ 仮定 A ⟶ 仮定 B ⟶ 定理 C ⟶ 定理 D ⟶ ?

図 4.1　公理的方法

他方，新しい定理を証明する代りに，仮定 B よりもっと基本的な新しい仮定

——たとえばそれを仮定 A としよう——を見いだして，仮定 B が仮定 A から証明できるようにすることができるかどうかを考えてもよい．われわれは，このようにして，まだ知識の未開な分野を次第に開拓していくのである．熱流に関する分野では，*エネルギー*（熱エネルギー）*保存*という概念が基本的であり，他の原理はこれから導かれる（図 4.2）．

エネルギーの保存則（仮定）⟶ $u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t)$ ⟶ その他の熱流の性質

図 4.2　エネルギーの保存則：熱流問題の基礎

もちろん，この課のことは忘れて，熱伝導方程式を出発点とすることもできよう（熱伝導方程式自身を自明なものであると考える人がいるかもしれない）．しかし，エネルギー保存という仮定は科学の基本にあるのであるから，それでは真面目な学生をごまかすことになろう．科学者はしばしば，ある特定の問題のモデル化を始めるに当たって，まず，エネルギー保存の関係を書き，それからそれを偏微分方程式に書き直すということをする．

さて，この課の目標である熱量保存の方程式から熱伝導方程式を導き出すという本題に戻ろう．

熱伝導方程式の誘導

長さ L の1次元の棒があるとし，次のような仮定をする：

1. 棒は熱を伝導する均質な物質からできている．
2. 棒の側面は絶縁してある（熱は x 方向にだけ流れる）．
3. 棒は細い（断面のすべての点で温度は一定である）．

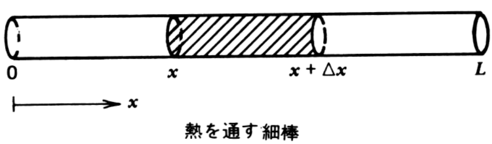


図 4.3　熱を通す細棒

熱量保存の法則を棒の $[x, x+\Delta x]$ の間の断片に適用すると，

$$(4.1)\qquad [x, x+\Delta x] \text{ の内部の総熱量の変化}$$
$$= \text{両境界面をよぎる総熱量}$$
$$+[x, x+\Delta x] \text{ の内部で発生する全熱量}$$

ということができる．ところで，任意の時刻 t における $[x, x+\Delta x]$ の内部の全熱量（J）は次のようにして測られる（この課の参考書1を見よ）：

$$[x, x+\Delta x] \text{ の内部の全熱量} = \int_x^{x+\Delta x} c\rho A u(s,t)\,ds$$

ここで

c＝棒の比熱（棒の熱を蓄える能力を示す）

ρ＝棒の密度

A＝棒の断面積

式(4.1)で表される熱エネルギーが保存されるという事実は，微積分の計算によって，

$$(4.2)\qquad \frac{d}{dt}\int_x^{x+\Delta x} c\rho A u(s,t)\,ds = c\rho A\int_x^{x+\Delta x} u_t(s,t)\,ds$$
$$= kA[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)] + A\int_x^{x+\Delta x} f(s,t)\,ds$$

と書くことができる．ここで

k＝棒の熱伝導度（熱を伝導する能力を示す）

$f(x,t)$＝熱源（$\mathrm{J\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}}$）

そこで，問題は式(4.2)を積分を含まない形に書き変えることである．読者は積分の平均値の定理を思い出してほしい．

積分の平均値の定理

$f(x)$ が $[a,b]$ で連続な関数であるなら，

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

となるような数 ξ（$a<\xi<b$）が存在する．

この結果を式(4.2)に適用すると次式が得られる：

$$c\rho A u_t(\xi, t)\Delta x = kA[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)] + Af(\xi, t)\Delta x$$
$$(x<\xi<x+\Delta x)$$

すなわち，

$$u_t(\xi, t)=\frac{k}{c\rho}\left\{\frac{u_x(x+\Delta x, t)-u_x(x, t)}{\Delta x}\right\}+\frac{1}{c\rho}f(\xi, t)$$

最後に，$\Delta x \to 0$ とすると，求める結果

(4.3)★
$$u_t(x, t)=\alpha^2 u_{xx}(x, t)+F(x, t)$$

が得られる．ここで，

$$\alpha^2=\frac{k}{c\rho} \quad \text{（棒の熱拡散率と呼ぶ）}$$

$$F(x, t)=\frac{1}{c\rho}f(x, t) \quad \text{（熱源密度）}$$

これでわれわれの話は終わりであるが，最後に，棒の側面が絶縁されていない場合について付け加えておこう．周囲の媒質の温度が 0℃ に保たれているとすると，熱は側面をよぎって温度 $u(x, t)$ に比例して出たり入ったりする．この場合，熱量保存の法則は

(4.4)
$$u_t=\alpha^2 u_{xx}-\beta u+F(x, t)$$

となる．ここで

$$\beta=\text{側面の伝熱係数} \quad (\beta>0)$$

注意

1. 定数 k は棒の材料の**熱伝導度**で，底面積 1 m^2，厚さ 1 m の板の両底面間の温度差が 1℃(1 K) のとき 1 秒間に流れる熱量（J）を示す．k の値は理化学定数表にある．代表的な値として，銅は約 400 J/m·s·K，熱の絶縁体では 0 に近い．

   棒の材質が一様であるなら k は x にはよらないが，k の値が温度 u に依存するような材質もある．そのときには，熱伝導方程式は非線形になる：

   $$u_t=\frac{1}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\{k(u)u_x\}$$

   しかし，たいてい，k は u と共に非常にゆっくりと変化するので，この非線形性は無視される．

2. 定数 c は物質の**比熱**（ρc が単位体積あたりの熱容量）であり，物質が蓄えることのできる熱エネルギーの量を示す．たとえば，焼芋は単位質量あたりたくさんの熱を蓄えることができる（そのため熱するのに長く時間がかかる）から，焼芋の熱容量は大きい．詳しくいうと，比熱は，1kg の物質の温度を 1 K（あるいは 1℃）だけ変えるのに必要な熱量（J；ジュー

ル）のことである．c を x と u に関係ない定数として扱うことが多い．典型的な物質の比熱の値は理化学定数表に書いてある．

3．熱流の基本的な量の単位（SI 単位系）は

u＝温度（摂氏度 ℃；ケルビンK）

u_t＝温度の時間変化率（K/s）

u_x＝温度曲線の傾き（K/m）

u_{xx}＝温度曲線のへこみ方（K/m²）

c＝比熱（J/kg·K）

k＝熱伝導度（J/m·s·K）

ρ＝密度（kg/m³）

α^2＝熱拡散率（m²/s）

4．物質の熱拡散率 $\alpha^2=k/c\rho$ はその物質の熱伝導度 k に比例し，密度 ρ と比熱 c に反比例する．これは直観的にもある程度納得がいくことであろう．

問題

1. 方程式

$$u_t=\alpha^2 u_{xx}-\beta u$$

の各変数 $u, u_t, \cdots$ にその単位を代入して，各項が同じ単位 K/s をもつことを確かめよ．

2. 方程式

$$u_t=\alpha^2 u_{xx}-v u_x$$

の各変数にその単位を代入して，各項が同じ単位をもつことを確かめよ．ただし v の単位は速度（m/s）である．

3. 熱伝導度 $k(x)$ が x に関係する場合の熱伝導方程式

$$u_t=\frac{1}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}[k(x)u_x]+f(x,t)$$

を導け．

4. 流れ（速度 v）の中の物質の濃度を $u(x,t)$ とし，$u(x,t)$ は拡散と対流との両方の影響で変化するものとする．いかなる時点においても領域 $[x, x+\Delta x]$ の中の物質の全質量が新しく生成されたり消滅したりしないという事実を用いて，方程式

$$u_t=\alpha^2 u_{xx}-v u_x$$

を導け．

ヒント　次のような保存方程式を考えよ：

$[x, x+\Delta x]$ の中の質量の変化

＝境界面をよぎる拡散による変化
　＋境界面をよぎって物質が運ばれることによる変化

参考書

1. L. A. Pipes, *Applied Mathematics for the Engineer and Physicist*, McGraw-Hill, 1958. 古い参考書であるが現在でも実践的な科学者には良い参考書である.
2. A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, MacMillan Company, 1963. 方程式の出し方をよく書いた良い本である. 同じシリーズの中に *A Collection of Problems on Mathematical Physics* もある. これは学生がもっと偏微分方程式を解く演習をするのに役立つであろう.

第5課　変　数　分　離

目的：　変数分離という強力な方法を導入し，よく知られた拡散の問題を解くのにこの方法がどのように使えるかを示すこと．代数的に複雑な性質をもっているためこの方法がよく理解できない学生もいるので，直観的な説明を随所に交えることにする．

変数分離の基本的な考え方は，問題の初期条件を簡単な成分に分解し，その各成分に対する応答を求め，そして，それらの応答を加え合わせるということである．これで任意の初期条件に対する応答を得ることができる．

変数分離の実際の手順の中にはこの基本的な考え方があまりよく見えないかもしれないが，この考え方が変数分離法の基本になっていることには変わりはない．

変数分離は初期値・境界値問題を解く技法の中で最も古くからあるものの一つであって，次の形の問題に適用される：

1. 偏微分方程式が線形で同次である（必ずしも定数係数でなくてよい）．
2. 境界条件の形が

$$\alpha u_x(0,t)+\beta u(0,t)=0$$
$$\gamma u_x(1,t)+\delta u(1,t)=0$$

である（この形の境界条件を**線形同次境界条件**と呼ぶ）．α, β, γ, δ は定数である．

この方法は Joseph Fourier の時代にまで遡る（実際，変数分離法のことを Fourier の方法と呼ぶこともある）．恐らく最も広く使われている解法（もちろんこれが適用できるような場合）であろう．

この方法の一般論を展開する代りに，一つの適用例を示そう（後でもっと一般的に話をすることにする）．次の初期値・境界値問題(拡散問題)を考えよう：

偏微分方程式　$u_t=\alpha^2 u_{xx}$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=\phi(x)$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$

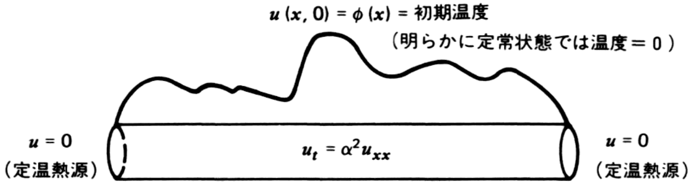


図 5.1　拡　散　問　題

変数分離を行う前に，まず，問題そのもののことを考えてみよう．ここでは両端の温度が零に固定されている有限長の棒があるとしている．この問題に対して，初期条件という形のデータも与えられている．われわれの目標はそれから後の時点における温度 $u(x,t)$ を求めることである．

ここで，方法そのものの話に入ることになるが，まず，その概略を述べよう．

変数分離法の概略

変数分離法では，$X(x)$ を x の関数，$T(t)$ を t の関数として，

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

という単純な形をした解を探すことから始める．この形の温度 $u(x,t)$ は，t のどんな値に対してもその基本的な"形状"を保持するから，この解は単純なのである (図 5.2)．偏微分方程式に対してこのような形の解を無限個 (それらは同時に境界条件をも満足する) 求めることが可能である．これらの単純な関数 $u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)$ (**基本解**と呼ぶ) は問題の基本的な構成要素であり，われわれが求めている解 $u(x,t)$ は，和

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t)$$

が初期条件を満足するように，単純な基本解 $X_n(x)T_n(t)$ を加え合わせることによって得られる．この和もまた偏微分方程式と境界条件とを満足するから，問題に対する解が得られたことになる．もっと詳細にこのことを述べよう．

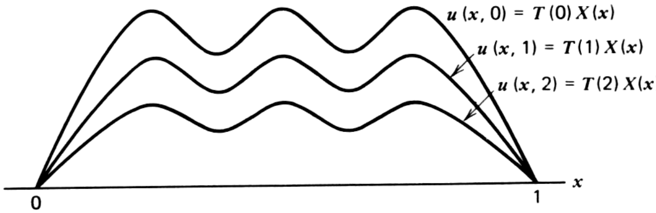


図 5.2 t のいろいろな値に対する $X(x)T(t)$ のグラフ

変数分離

〈ステップ 1〉（偏微分方程式の基本解を求めること）

次の 4 条件を満足する関数 $u(x,t)$ を求めたい：

偏微分方程式 $u_t=\alpha^2u_{xx}\quad(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件 $\begin{cases}u(0,t)=0\\u(1,t)=0\end{cases}\quad(0<t<\infty)$

初期条件 $u(x,0)=\phi(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$

まず偏微分方程式に $X(x)T(t)$ を代入して $X(x)T(t)$ について解き $u(x,t)=X(x)T(t)$ という形の解を探す．代入により

$$X(x)T'(t)=\alpha^2X''(x)T(t)$$

が得られる．ここで，変数分離法の一番肝心な部分に入る．この式の両辺を $\alpha^2X(x)T(t)$ で割ると，

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

が得られて，**変数が分離**されたことになる．すなわち，この式の左辺は t だけに関係し右辺は x だけに関係する．x と t は互に独立であるから，両辺はある定った定数（たとえば k）でなければならない．したがって

$$\frac{T'}{\alpha^2T}=\frac{X''}{X}=k$$

と書ける．すなわち，

$$T'-k\alpha^2T=0$$
$$X''-kX=0$$

である．そこで，これら二つの常微分方程式をそれぞれに解き，それらを掛け

合わせれば偏微分方程式の解が得られる．（ここでやったことの本質は，２階の偏微分方程式を二つの常微分方程式に変えたことであるということに注意せよ.）しかるに，ここで一つ重要なことに注意しなければならない．すなわち，分離定数 k は負であってほしい（そうでないと，$t\to\infty$ のときに $T(t)$ が０にならない）．こうするために，普通 $k=-\lambda^2$ とおく（$\lambda\neq 0$；こうすれば $k=-\lambda^2$ は負であることが保証される）．新しい分離定数 λ を使うと，二つの常微分方程式は

$$T'+\lambda^2\alpha^2T=0$$
$$X''+\lambda^2X=0$$

のように書ける．これらを解こう．両者とも標準的な形の常微分方程式であるから，解は直ちに

$$T(t)=Ce^{-\lambda^2\alpha^2t}\quad (C\text{は任意の定数})$$
$$X(x)=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)\quad (A,B\ \text{は任意の定数})$$

であることがわかり，したがってすべての関数

$$u(x,t)=e^{-\lambda^2\alpha^2t}[A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)]$$

が偏微分方程式 $u_t=\alpha^2u_{xx}$ を満足する（A, B, λ は任意；$T(t)=Ce^{-\lambda^2\alpha^2t}$ の任意の定数 C は積 $X(x)T(t)$ を作るときに $X(x)=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)$ の任意定数 A，B の中に繰り入れてしまうことができる）．この事実を確かめることがこの課の練習問題１である．ここまでで，偏微分方程式を満たす無限個の関数が得られたことになる．

〈ステップ 2〉（境界条件を満たす偏微分方程式の解を求めること）

ここまでで，偏微分方程式のたくさんの解を作り出すことができたが，それらの解のすべてが境界条件と初期条件を満足しているわけではない．次のステップは，今得られている解の集団

$$e^{-\lambda^2\alpha^2t}[A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)] \tag{5.1}$$

の中から境界条件

$$u(0,t)=0$$
$$u(1,t)=0$$

を満足するような部分集合を選ぶことである．このために，解 (5.1) をこれらの境界条件に代入すると，

$$u(0,t)=Be^{-\lambda^2\alpha^2t}=0 \qquad \Rightarrow B=0$$
$$u(1,t)=Ae^{-\lambda^2\alpha^2t}\sin\lambda=0 \Rightarrow \sin\lambda=0$$

が得られる．第2の境界条件から，今まで任意の定数（$\neq 0$）としていた分離定数 λ に制限が加えられることになる．λ は方程式 $\sin\lambda=0$ の根でなければならない．すなわち，$u(1,t)=0$ であるためには

$$\lambda=\pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ \cdots$$

あるいは，

$$\lambda_n=\pm n\pi \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

と選ぶ必要がある．第2の境界条件だけを見ると $A=0$ でもよいように見えるが，そうすると，(5.1) の解が0になってしまうので，そうおくわけにはいかない．

これで第2ステップは終わった．ここまでで，偏微分方程式と境界条件の両方を満足する無限個の関数

(5.2)★　$$u_n(x,t)=A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x) \quad (n=1,2,\cdots)$$

が得られたことになる*．これらの関数が解の構成要素をなし，求める解はこれら単純な関数の和として表せることになる．どのように和を作るかは初期条件による．これらの基本解 $u_n(x,t)$ のグラフを図5.3に示す．

〈ステップ 3〉（境界条件と初期条件のすべてを満たす偏微分方程式の解を求めること）

最後の，そして恐らく数学的観点からすると最も興味あるステップは，初期条件

$$u(x,0)=\phi(x)$$

を満足するように係数 A_n を選んで基本解の和

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x)$$

を作ることである．この和を初期条件に代入すると

(5.3)　$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\pi x)$$

が得られる．この式から係数 A_n を定めるという問題は，実はフランスの数学者 Joseph Fourier が提起した興味ある問題——初期温度分布 $\phi(x)$ を次のような基本解の和として展開することができるかという問題——である：

$$A_1\sin(\pi x)+A_2\sin(2\pi x)+A_3\sin(3\pi x)+\cdots$$

$\phi(x)$ が十分すなおな関数であるならば，たとえば連続で有界変動であるなら

* 関数 u_n と u_{-n} とは符号を除いて本質的には同じものであるので，$n<0$ の方は除いた．

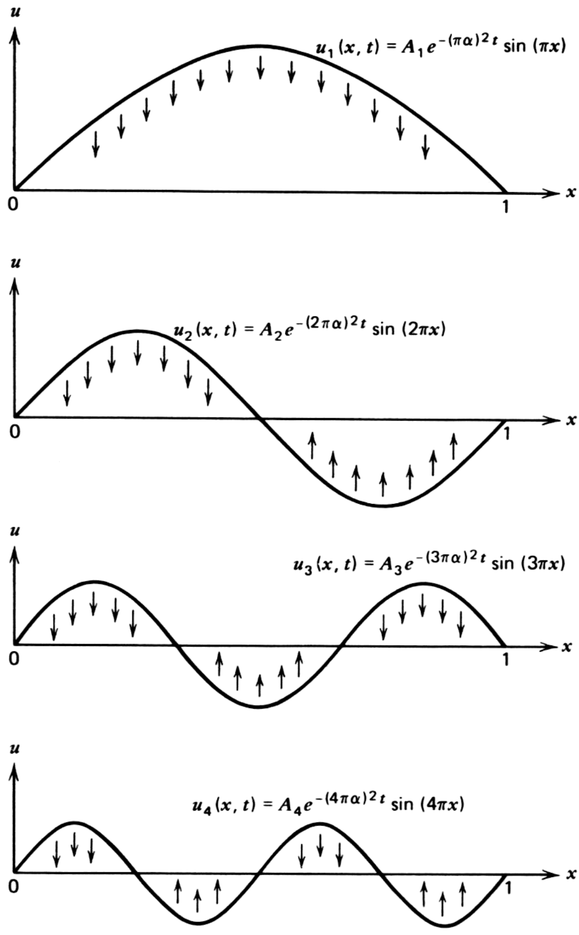


図 5.3　基本解 $u_n(x,t)=A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x)$

ば，この問題の答えは“イエス”である．したがって，問題は係数 A_n をどうやって求めるかということになる．

これは実際には非常に簡単である．すなわち，関数族（関数の集合）

$$\{\sin(n\pi x)\ ;\ n=1,2,\cdots\}$$

の**直交性**という性質を使う．これらの関数は

$$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \dfrac{1}{2} & (m=n)\end{cases}$$

という意味で互いに直交していることがわかる（練習問題2参照）．この性質は関数のグラフを描いて眺めてみればわかる（図 5.4）．

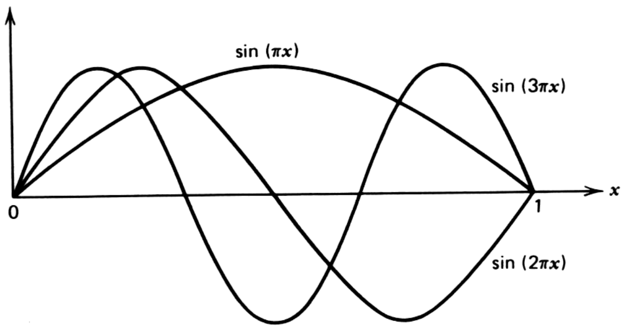


図 5.4　直交関数列

さていよいよ展開式

$$\phi(x)=A_1\sin(\pi x)+A_2\sin(2\pi x)+A_3\sin(3\pi x)+A_4\sin(4\pi x)+\cdots$$

の係数を求めることにする．この式の両辺に $\sin(m\pi x)$（m は任意の整数）を掛けて，0から1まで積分すると，直交性のためにほとんどの項が消えて，

$$\int_0^1 \phi(x)\sin(m\pi x)dx=A_m\int_0^1 \sin^2(m\pi x)dx=\frac{1}{2}A_m$$

が得られる．A_m について解けば

$$A_m=2\int_0^1 \phi(x)\sin(m\pi x)dx$$

となる．これで，求める解が

(5.4)★
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-(n\pi\alpha)^2t}\sin(n\pi x)$$

と表され，その中の係数 A_n は

(5.5)★
$$A_n=2\int_0^1 \phi(x)\sin(n\pi x)dx$$

によって与えられることがわかった．この答えがこの問題の最初の4条件全部を満たしていることを調べて確認することができる．これでステップ3を終了

する．

得られた解がこんなに複雑な形をしているのを見て，学生の多くはがっかりして解を２度と眺めようとしない（残念なことであるが）．ゆっくり時間をかけてこの解を分析してみるならば，そんなに難しいものではない．実際，解が複雑であればあるほど，そこに含まれている情報の量も多いのである．この解の意味を知る助けとなるような二三の注意を次に挙げる．

注意

1. $\phi(x)$ の Fourier 正弦展開 (5.3) と解 (5.4) との違いは，時間の因子

$$e^{-(n\pi\alpha)^2 t}$$

が各項に掛かっているかどうかだけである．したがって，もし初期条件が

$$\phi(x)=\sin(\pi x)+\frac{1}{2}\sin(3\pi x)$$

というような簡単な形をしているならば，解は単に

$$u(x,t)=e^{-(\pi\alpha)^2 t}\sin(\pi x)+\frac{1}{2}e^{-(3\pi\alpha)^2 t}\sin(3\pi x)$$

となるだけである．この場合，$\phi(x)$ を Fourier 正弦級数に展開すると，

$$A_1=1$$
$$A_2=0$$
$$A_3=\frac{1}{2}$$
$$A_4=A_5=\cdots=0$$

が得られる．

2. 解 (5.4) は次のように解釈できる：初期温度 $\phi(x)$ を簡単な関数 $A_n\sin(n\pi x)$ の和の形に展開し，それからその各成分に対する応答 $A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x)$ を足して初期条件 $u(x,0)=\phi(x)$ に対応する解を得る．

3. 解

$$u(x,t)=A_1 e^{-(\pi\alpha)^2 t}\sin(\pi x)+A_2 e^{-(2\pi\alpha)^2 t}\sin(2\pi x)+\cdots$$

の各項は x と t の関数である．この級数の先の方の項は

$$e^{-(n\pi\alpha)^2 t}$$

という因子のために非常に速く小さくなることに注意せよ．したがって，長い間には，解は第１項に近似的に等しくなる：

$$u(x, t) \cong A_1 e^{-(\pi\alpha)^2 t} \sin(\pi x)$$

また，この第1項は時間と共に減衰する正弦曲線の形をしている（図5.5）．

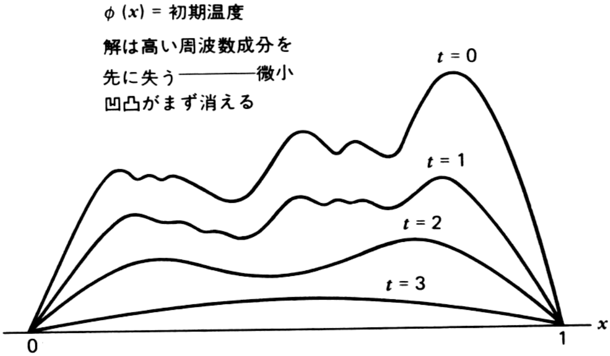


図 5.5　拡散問題では高次の項は速やかに減衰する

練習問題

1. A. B, λ を任意定数として，$u(x,t)=e^{-\lambda^2\alpha^2 t}[A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)]$ が偏微分方程式 $u_t=\alpha^2 u_{xx}$ を満足することを示せ．

2. $$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \frac{1}{2} & (m=n)\end{cases}$$

   であることを示せ．

   ヒント　恒等式

   $$\sin(m\pi x)\sin(n\pi x)=\frac{1}{2}[\cos(m-n)\pi x-\cos(m+n)\pi x]$$

   を使え．

3. $\phi(x)=1$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ の Fourier 正弦展開を求めよ．初めの3項あるいは4項の和の図を描け．

4. 練習問題3の結果を使うと，初期値・境界値問題

   偏微分方程式　$u_t=u_{xx}$　$(0<x<1)$

   境界条件　$\begin{cases}u(0,t)=0\\ u(1,t)=0\end{cases}$　$(0<t<\infty)$

   初期条件　$u(x,0)=1$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$

の解はどうなるか.（棒の両端の温度を 1 度から 0 度に瞬時に引き下げようというのであるから，この問題は物理的には不可能であることに注意せよ．たいていの問題において，境界条件が 0 なら，初期温度 $\phi(x)$ も $x=0$ と $x=1$ で 0 でなければならない.）

5. 練習問題 4 の初期条件を

$$u(x,0)=\sin(2\pi x)+\frac{1}{3}\sin(4\pi x)+\frac{1}{5}\sin(6\pi x)$$

に変えたら解はどうなるか.

6. 練習問題 4 の初期条件が

$$u(x,0)=x-x^2 \quad (0<x<1)$$

なら解はどうなるか.

参考書

Tyn Myint-U, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Elsevier, 1973. 本書よりいくぶん程度の高い良く書かれた教科書である．第 6 章は変数分離に関する大きな章で良い問題をいくつも取り扱っている.

第６課　非同次境界条件を同次境界条件に変換すること

目的：　初期値・境界値問題

偏微分方程式　$u_t-\alpha^2u_{xx}=f(x,t)$

境界条件　$\begin{cases}\alpha_1u_x(0,t)+\beta_1u(0,t)=g_1(t)\\ \alpha_2u_x(L,t)+\beta_2u(L,t)=g_2(t)\end{cases}$

初期条件　$u(x,0)=\phi(x)$

を

$$U_t-\alpha^2U_{xx}=F(x,t)$$
$$\alpha_1U_x(0,t)+\beta_1U(0,t)=0$$
$$\alpha_2U_x(L,t)+\beta_2U(L,t)=0$$
$$U(x,0)=\bar{\phi}(x)$$

というような，（境界条件が零の）新しい初期値・境界値問題に変換する方法を示すこと．この新しい問題は，次のようにして解くことができる：

1. 新しい偏微分方程式がもし同次（$F(x,t)=0$）なら，変数分離法による
2. $F(x,t)\neq 0$ なら，積分変換や固有関数展開の方法による

前の課で述べた変数分離の方法は非常に強力で，見事な級数解を与えるけれども，すべての問題がそれで解決するというわけではないということも知っていなければならない．変数分離を適用するには境界条件は次のような形（線形同次境界条件）をしていなければならない：

(6.1)
$$\alpha_1u_x(0,t)+\beta_1u(0,t)=0$$
$$\alpha_2u_x(L,t)+\beta_2u(L,t)=0$$

この課の目的は

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{偏微分方程式} & u_t=\alpha^2 u_{xx} \\
(6.2) & \text{境界条件} & \begin{cases} \alpha_1 u_x(0,t)+\beta_1 u(0,t)=g_1(t) \\ \alpha_2 u_x(L,t)+\beta_2 u(L,t)=g_2(t) \end{cases} \text{(非同次境界条件)} \\
 & \text{初期条件} & u(x,0)=\phi(x)
\end{array}
$$

のような非同次境界条件をもつ問題も，境界条件が零の問題に変換して解くことができるということを示すことである．そして，新しい問題は（固有関数展開のような）他の方法で解くことができる．まず，非同次境界条件をもつ非常に簡単な問題を境界条件が零の問題に変換する話から始めよう．

非同次境界条件を同次境界条件に変換すること

両端が一定の温度 k_1 および k_2 に保たれた絶縁された棒の中の熱の流れを考えよう．すなわち，

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{偏微分方程式} & u_t=\alpha^2 u_{xx} \quad (0<x<L,\ 0<t<\infty) \\
(6.3) & \text{境界条件} & \begin{cases} u(0,t)=k_1 \\ u(L,t)=k_2 \end{cases} \quad (0<t<\infty) \\
 & \text{初期条件} & u(x,0)=\phi(x) \quad (0\leqslant x\leqslant L)
\end{array}
$$

ここで難しいのは，境界条件が同次でないため，この問題を変数分離で解くことができないことである．しかし，境界の温度 k_1 と k_2 の間を（x 方向に）直線的に変化する定常解（$t=\infty$ の解）が存在することは明らかである（図 6.1）．いいかえれば，温度 $u(x,t)$ を二つの成分の和と考えたらよさそうである．

$u(x,t)=$ 定常の成分　＋　過渡成分

↗ 十分時間が経った後の終局的な解　　↖ 解のうち初期条件に関する部分（0 に収束する）

$$=\left[k_1+\frac{x}{L}(k_2-k_1)\right]+U(x,t)$$

このような和の形に書けるとして，過渡成分 $U(x,t)$ を求めることにしよう．

$$u(x,t)=\left[k_1+\frac{x}{L}(k_2-k_1)\right]+U(x,t)$$

を一番最初の問題 (6.3) に代入すると，$U(x,t)$ についての新しい問題が得ら

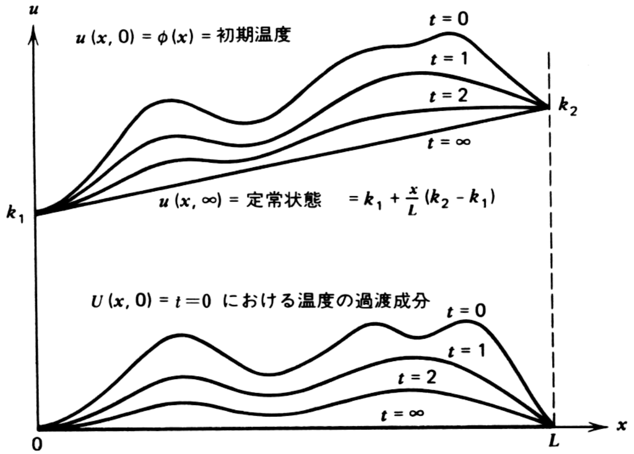


図 6.1　時間をいろいろに変えたときの (6.3) の解

れる．そこで，この新しい問題を $U(x,t)$ について解き，それに定常成分を足せば $u(x,t)$ が得られる．(6.3) への代入計算をすると，

(6.4)
$$\begin{aligned}
&\text{偏微分方程式}\quad U_t=\alpha^2 U_{xx}\quad (0<x<L)\\
&\text{境界条件}\quad \begin{cases}U(0,t)=0\\ U(L,t)=0\end{cases}\quad (0<t<\infty)\\
&\text{初期条件}\quad U(x,0)=\underbrace{\phi(x)-\left[k_1+\frac{x}{L}(k_2-k_1)\right]}
\end{aligned}$$

$\Phi(x)$ = 新しい初期条件（既知である）

が得られる．この問題は（幸いにも）同次偏微分方程式と同次境界条件になる．したがって変数分離で解ける．実際，読者は

(6.5)
$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t}\sin(n\pi x/L)$$
$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L \Phi(\xi)\sin(n\pi\xi/L)d\xi$$

という解を思い起こすであろう．

境界面の温度が一定の棒についてはこれで話を終わる．もっと実用的な形，つまり微分を含んだ境界条件で右辺が時間とともに変化するようなものについ

てはどうなるか．考え方は上の問題と同じであるがもう少し複雑である．

時間とともに変化する境界条件を右辺が零の形に変換すること

次の典型的な問題を考えよう：

偏微分方程式　$u_t=\alpha^2 u_{xx}$　$(0<x<L,\ 0<t<\infty)$

(6.6)　境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=g_1(t) \\ u_x(L,t)+hu(L,t)=g_2(t) \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=\phi(x)$　$(0\leqslant x\leqslant L)$

右辺が零でない境界条件を同次形にするため，（いろいろな形を試してみて）

(6.7)
$$u(x,t)=A(t)\left[1-\frac{x}{L}\right]+B(t)\left[\frac{x}{L}\right]+U(x,t)$$

という形の解を探すことにする．ここで，$A(t)$，$B(t)$ は，定常成分

(6.8)
$$S(x,t)=A(t)\left[1-\frac{x}{L}\right]+B(t)\left[\frac{x}{L}\right]$$

が問題の境界条件を満たすように選ぶ．このようにすると，変換後の $U(x,t)$ に関する問題の境界条件は同次になる．$S(x,t)$ を境界条件

$$S(0,t)=g_1(t)$$
$$S_x(L,t)+hS(L,t)=g_2(t)$$

に代入すると，$A(t)$ と $B(t)$ を求めるための二つの式が得られる．それらの式から

(6.9)
$$A(t)=g_1(t)$$
$$B(t)=\frac{g_1(t)+Lg_2(t)}{1+Lh}$$

が得られる．したがって，

$$u(x,t)=g_1(t)\left[1-\frac{x}{L}\right]+\frac{g_1(t)+Lg_2(t)}{1+Lh}\left[\frac{x}{L}\right]+U(x,t)$$

である．これを最初の問題 (6.6) に代入すると，変換後の $U(x,t)$ に関する問題

偏微分方程式　$U_t=\alpha^2 U_{xx}-S_t$　（非同次偏微分方程式）

(6.10)　境界条件　$\begin{cases} U_x(L,t)+hU(L,t)=0 \\ U(0,t)=0 \end{cases}$　（同次境界条件）

初期条件　$U(x,0)=\phi(x)-S(x,0)$　（新しい初期条件——既知）

が得られる（確かめてみよ）．こうして，右辺が零であるような境界条件をも

つ新しい問題（不幸なことに偏微分方程式は非同次になるが）が得られた．この問題は変数分離で解くことはできないが，もう少し先の課に進んだところで，積分変換や固有関数展開を使って解く方法を示そう．

注意

1. この課の目標は非同次の境界条件をもつ問題を右辺が零の境界条件をもつ問題に変換することであった．そのようにして新しくできた偏微分方程式がたまたま同次であれば，変数分離によって問題を解くことができるので具合がよい（最初の例のように）．

   一方，新しく変換してできた偏微分方程式が非同次であれば，何か他の方法で新しい問題を解かなければならない．

2. 最も一般的な線形非同次境界条件

$$\alpha_1 u_x(0,t)+\beta_1 u(0,t)=g_1(t)$$
$$\alpha_2 u_x(L,t)+\beta_2 u(L,t)=g_2(t)$$

   もまた，第2の例で使った技巧と同じようなものを使って，右辺が零の境界条件に変換できる．もちろん，新しい偏微分方程式は，ほとんどの場合，非同次になってしまう．

3. 境界条件が同次であることを全く必要としないような解法，したがってこの課でやったような予備的な変換など必要のない解法もいくつかある．後の課で，**ラプラス変換**を学ぶ際に，境界条件の右辺が零でなくてもよいということがわかるであろう（その方法のほうがこの課の方法より易しいこともある）．

4.
$$u(0,t)=g_1(t)$$
$$u(L,t)=g_2(t)$$

   という形の境界条件に対しては，第2の例で述べた方法によると

$$u(x,t)=\left\{g_1(t)+\frac{x}{L}[g_2(t)-g_1(t)]\right\}+U(x,t)$$

   という変換が得られる．

練習問題

1. 初期値・境界値問題

   偏微分方程式　$u_t=\alpha^2 u_{xx}+x\cos t \quad (0<x<1)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=1 \\ u_x(1,t)+hu(1,t)=1 \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=\sin(\pi x)$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$

を右辺が零の境界条件に変換することによって解け．

2.　偏微分方程式　$u_t=u_{xx}$　$(0<x<1)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=1 \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=x^2$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$

を，右辺が零の境界条件に変換して解け．この問題の解は，いろいろな時刻において，どんな様子をしているか．それらは読者の直観と一致するか．定常解は何か．過渡成分はどんな様子をしているか．

3.　偏微分方程式　$u_t=u_{xx}$　$(0<x<1)$

境界条件　$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(1,t)+hu(1,t)=1 \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=\sin(\pi x)$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$

を，右辺が零の境界条件をもつ新しい問題に変換せよ．新しい偏微分方程式は同次か．

参考書

R. L. Street, *Analysis and Solution of Partial Differential Equations*, Brooks-Cole, 1973. この優れた教科書には，この課で述べたような変換について詳しく述べた節と変数分離について良く書いた節とが含まれている．

第7課　もっと複雑な問題を変数分離で解くこと

目的：より複雑な熱流問題の変数分離による解法を示すこと．この課では，一つの問題をきちんと解いてみて，読者に変数分離法に慣れてもらうことを目指している．ここで説明する考え方を押し進めて，読者各自がもっている問題を解くことができるようになって頂きたい．

Sturm–Liouville（ステュルム・リウヴィル）問題として知られる固有値問題を導き，これら一般的な問題のいくつかの性質について話をする．

この課の目的は，読者が自力でやろうとすると厄介そうな初期値・境界値問題を変数分離法で解いてみせることである．読者は，この問題を参考にして，本書で特に触れないような他の問題にもこの方法を当てはめてみることができるであろう．

まず，境界条件の一つが導関数を含んでいるような1次元の熱流問題から始めよう．

境界条件が導関数を含む熱流問題

図のような装置を考えよう．棒の上端の温度は $u(0,t)=0$ に固定されている．棒の下端は一定温度0（基準温度を0としている）を保っている水溶液の中へ浸す．熱の自然な流れ（Newton の冷却の法則）から，$x=1$ における境界条件は

$$u_x(1,t)=-hu(1,t) \quad (h>0)$$

である．さて，棒の初期温度を $u(x,0)=x$ とし，その直後から（$t>0$）上記の境界条件を適用するものとしよう．爾後の温度を求めるには，初期値・境界値問題

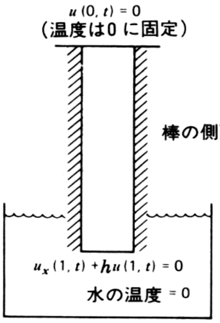


図 7.1　初期値・境界値問題の図

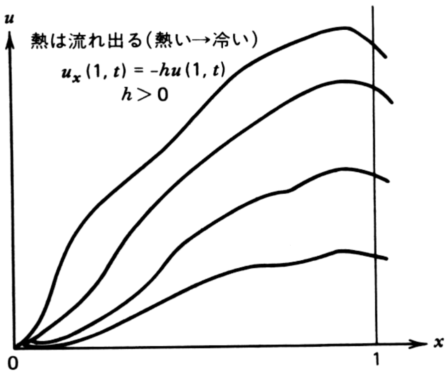


図 7.2　境界条件 $u(0, t)=0$; $u_x(1, t)=-hu(1, t)$ を満足する曲線の性質

$$
(7.1)\quad
\begin{array}{lll}
\text{偏微分方程式} & u_t=\alpha^2 u_{xx} & (0<x<1,\ 0<t<\infty) \\
\text{境界条件} & \begin{cases} u(0, t)=0 \\ u_x(1, t)+hu(1, t)=0 \end{cases} & (\text{同次境界条件}) \\
\text{初期条件} & u(x, 0)=x & (0\leqq x\leqq 1)
\end{array}
$$

を解かなければならない．変数分離法を適用するため，次のステップを踏む．

〈**ステップ 1**〉（偏微分方程式を二つの常微分方程式に分ける）

$u(x, t)=X(x)T(t)$ を偏微分方程式に代入すると

$$XT'=\alpha^2 X''T$$

となるが，これを $\alpha^2 XT$ で割ると

$$\frac{T'}{\alpha^2 T}=\frac{X''}{X}$$

となる．左辺は時間 t だけの関数，右辺は x だけの関数で，しかも x と t は独立だから，この式の両辺は定数でなければならない．その定数を μ とすると二つの常微分方程式

(7.2)
$$T'-\mu\alpha^2 T=0$$
$$X''-\mu X=0$$

が得られる．これで変数分離過程は完了した．

〈**ステップ 2**〉（分離定数を定める）

まず，μ は正にはなりえない．もし正であるとすると，$T(t)$ が指数関数的に無限に大きくなる（そして $u=XT$ が無限大になるが，物理的考察よりそのようなことはありえない）からである．

次に，$\mu=0$ と仮定する．すると

$$X''=0,\quad T'=0$$

となり，従って

$$X(x)=A+Bx\quad,\quad T(t)=C$$

である．ところが，この問題の境界条件は

$$u(0,t)=AC=0$$
$$u_x(1,t)+hu(1,t)=[B(1+h)+Ah]C=0$$

であるから，

$$C=0 \quad \text{または} \quad \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$$

という結果になってしまう．これは $u(x,t)=0$ を意味する．いいかえれば，$\mu=0$ とすると $u=0$ という解しか得られない．したがって，$\mu=0$ の場合は捨てる（われわれは非零の解を探しているのだから）．

最後に，$\mu<0$ の場合を考える．$\mu=-\lambda^2$ とおけば，二つの常微分方程式 (7.2) は

$$T'+\lambda^2\alpha^2 T=0$$
$$X''+\lambda^2 X=0$$

と書けるが，これから

$$T(t)=Ce^{-(\lambda\alpha)^2 t}$$
$$X(x)=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)$$

という解が得られる．したがって，任意の λ，任意の A, B に対して

(7.3) $$u(x,t)=e^{-(\lambda\alpha)^2 t}[A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)]$$

の形をした関数はすべて上の偏微分方程式を満たすことになる（計算は読者自身で確かめることができる）．次にやりたいことは，この関数のうちどれだけが境界条件

(7.4) $$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u_x(1,t)+hu(1,t)=0 \end{cases}$$

を満足するかを調べることである．解 (7.3) を境界条件 (7.4) に代入すると，λ, A, B が満たさなければならない条件が得られる．すなわち

$$Be^{-(\lambda\alpha)^2 t}=0 \qquad \Rightarrow B=0$$
$$A\lambda e^{-(\lambda\alpha)^2 t}\cos\lambda+hAe^{-(\lambda\alpha)^2 t}\sin\lambda=0$$

この最後の式を少し変形すると，λ に対する所望の条件

$$\tan\lambda=-\lambda/h$$

が得られる．つまり，λ を求めるには，曲線 $\tan\lambda$ と $-\lambda/h$ との交点を求めなければならない（図 7.3）．これらの値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ は，与えられた h に対して，数値的に計算機を使って計算できる．これらの値は，境界値問題

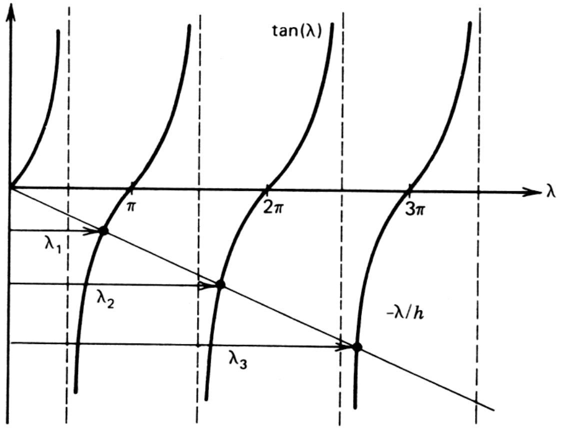


図 7.3　$\tan\lambda$ と $-\lambda/h$ との交点を示すグラフ

$$
(7.5)\qquad \begin{cases} X''+\lambda^2 X=0 \\ X(0)=0 \\ X'(1)+hX(1)=0 \end{cases}
$$

の**固有値**と呼ばれる．いいかえれば，固有値とは非零の解が存在するような λ の値のことである．(7.5) の固有値 λ_n（今の場合，$\tan\lambda=-\lambda/h$ の根）を（$h=1$ に対して）数値的に計算し，その始めの方の 10 個の値を表にしたのが表 7.1 である．

表 7.1　$\tan\lambda=-\lambda$ の根

n	λ_n
1	2.02876
2	4.91318
3	7.97867
4	11.0855
5	14.2074
6	17.3364
7	20.4692
8	23.6043
9	26.7409
10	29.8786

固有値 λ_n に対応する (7.5) の解を**固有関数** $X_n(x)$ と呼ぶ．この問題では

$$X_n(x)=\sin(\lambda_n x)$$

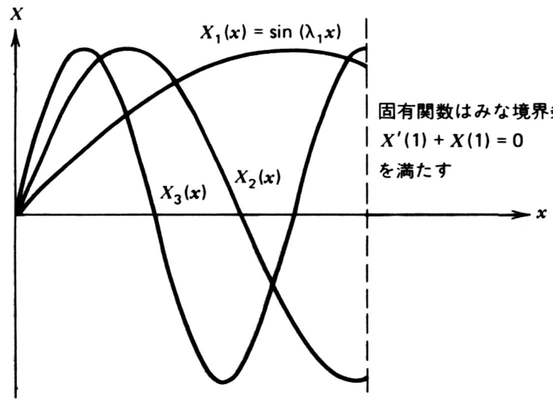


図 7.4　$h=1$ に対する (7.5) の固有関数 $X_n(x)$

である．図 7.4 を見よ．

〈**ステップ 3**〉（基本解を求める）

これまでに偏微分方程式と境界条件を満足する関数（基本解）

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=e^{-(\lambda_n\alpha)^2t}\sin(\lambda_n x)$$

が無限個得られている．最後のステップは，$t=0$ のときの初期条件に適合するようにこれらの関数を足し合わせることである（偏微分方程式も境界条件もともに線形で同次であるから，この和もまた偏微分方程式と境界条件を満足する）．つまり，初期条件 $u(x,0)=x$ を満足するように和

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}a_nX_n(x)T_n(t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-(\lambda_n\alpha)^2t}\sin(\lambda_n x)\end{aligned}$$

を作る．すなわち

(7.6)
$$u(x,0)=x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(\lambda_n x)$$

である．いよいよ最後のステップに移る．

〈**ステップ 4**〉（初期条件を固有関数の和に展開する）

固有関数展開 (7.6) の係数 a_n を求めるためにこの式の両辺に $\sin(\lambda_m x)$ を掛け，x について 0 から 1 まで積分する．すなわち*

$$\begin{aligned}\int_0^1\xi\sin(\lambda_m\xi)d\xi&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_0^1\sin(\lambda_n\xi)\sin(\lambda_m\xi)d\xi\\&=a_m\int_0^1\sin^2(\lambda_m\xi)d\xi\\&=a_m\left(\frac{\lambda_m-\sin\lambda_m\cos\lambda_m}{2\lambda_m}\right)\end{aligned}$$

a_mについて解けば求める結果が得られる（a_m を a_n と書き直す）：

(7.7)
$$a_n=\frac{2\lambda_n}{\lambda_n-\sin\lambda_n\cos\lambda_n}\int_0^1\xi\sin(\lambda_n\xi)d\xi$$

ゆえに，(7.1) の解は

(7.8)
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-(\lambda_n\alpha)^2t}\sin(\lambda_n x)$$

で，係数 a_n は (7.7) で与えられる．この問題の定数 a_n の始めの 10 個を計

---

* $\int_0^1\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_m x)dx=0$ $(\lambda_n\neq\lambda_m)$ であることは後の“注意”の性質 3 による．

算すると，表 7.2 に示す通りとなる ($h=1$).

表 7.2 (7.8) の係数 a_n

n	a_n
1	0.72918
2	−0.15616
3	0.06140
4	−0.03216
5	0.01967
6	−0.01324
7	0.00951
8	−0.00716
9	0.00558
10	−0.00447

したがって，初期値・境界値問題

$$\text{(7.9)}\qquad \begin{array}{lll} \text{偏微分方程式} & u_t = u_{xx} & (0<x<1,\ 0<t<\infty) \\ \text{境界条件} & \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u_x(1,t)+u(1,t)=0 \end{cases} & (0<t<\infty) \\ \text{初期条件} & u(x,0)=x & (0\leqslant x\leqslant 1) \end{array}$$

の解の最初の 4 項は

$$u(x,t)=0.73\,e^{-4.12t}\sin(2.03\,x)-0.16\,e^{-24.1t}\sin(4.91\,x)$$
$$+0.06\,e^{-63.7t}\sin(7.98\,x)-0.03\,e^{-123t}\sin(11.1\,x)+\cdots$$

である．図 7.5 にはこの解のグラフを時間をいろいろに変えて描いてある．こ

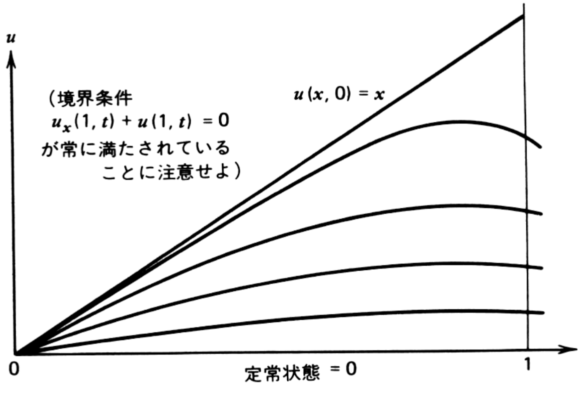


図 7.5 (7.8) の解

の解が自分の直観と一致するかどうか，また問題の境界条件を満足するかどうか，読者は自分で考えてみるとよい．

注意

固有値問題 (7.5) は **Sturm-Liouville 問題** と呼ばれる一般的な問題

(7.10)
常微分方程式　$[p(x)y']'-q(x)y+\lambda r(x)y=0 \quad (0<x<1)$

境界条件　$\begin{cases}\alpha_1 y(0)+\beta_1 y'(0)=0\\ \alpha_2 y(1)+\beta_2 y'(1)=0\end{cases}$

の特殊な場合である．変数分離により線形同次境界条件をもつ偏微分方程式を解くとき，$X(x)$ についての常微分方程式とその境界条件は，常にある特殊な Sturm-Liouville 問題となる．固有値問題 (7.5) が (7.10) の特殊な場合であることはわかるであろう．

Sturm と Liouville が証明したことは，関数 $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$ がある適当な条件を満足していれば，問題 (7.10) は

1. 固有値の無限列

$$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots<\lambda_n<\cdots\to\infty$$

をもち，

2. 固有値 λ_n のそれぞれに対応して，非零解 $y_n(x)$ がちょうど1個 ($y_n(x)$ の定数倍は除く) 存在する．
3. $y_n(x)$ と $y_m(x)$ とが ($\lambda_n\neq\lambda_m$ に対応する) 二つの異なる固有関数であるとき，これらは区間 $[0,1]$ で重み関数 $r(x)$ に関して直交している，すなわち

$$\int_0^1 r(x)y_n(x)y_m(x)dx=0$$

を満足する．

Sturm-Liouville 型の問題の詳細は“参考書1と2”に書いてある．

練習問題

1. 次の熱流問題を変数分離によって解け．

偏微分方程式　$u_t=u_{xx} \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases}u(0,t)=0\\ u_x(1,t)=0\end{cases} \quad (0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=x \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$

その解は直観と一致するか．定常解は何か．

2. Sturm–Liouville 問題

常微分方程式　$X''+\lambda X=0 \quad (0<x<1)$

境界条件　$\begin{cases} X(0)=0 \\ X'(1)=0 \end{cases}$

の固有値と固有関数は何か．この式を一般的な Sturm–Liouville 問題とみなしたときの関数 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ は何か．

3. 両端が熱的に絶縁されている場合を表す次の問題を解け．

偏微分方程式　$u_t=u_{xx} \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(1,t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=x \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$

得られた解は問題の物理的解釈と一致するか．定常解は何か．なるほどと思えるか．

4. 常微分方程式　$X''+\lambda X=0 \quad (0<x<1)$

境界条件　$\begin{cases} X'(0)=0 \\ X'(1)=0 \end{cases}$

の固有値と固有関数は何か．

参考書

1. W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary-Value Problems*, John Wiley & Sons, 1965. Chapter 11. これは常微分方程式の教科書で，Sturm Liouville 問題に関する優れた節がある．常微分方程式についての良い学部用教科書の一つである．

2. E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, 1967. この本には典型的な問題を解いた例がたくさん含まれている．読みやすい本である．

第8課　難しい方程式を簡単な方程式に変えること

目的：　$u(x,t)$ についての偏微分方程式を新しい未知関数 $w(x,t)$ についての新しい（より易しい）偏微分方程式に変換する方法を示すこと．どんな変換をすればよいかは一般には直観による．この課では偏微分方程式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u$$
$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x$$

を，それぞれ，変換

$$u(x,t) = e^{-\beta t} w(x,t)$$
$$u(x,t) = e^{v\{x-(vt/2)\}/(2\alpha^2)} w(x,t)$$

によって簡単な熱伝導方程式

$$w_t = \alpha^2 w_{xx}$$

に変換する．変換後の熱伝導方程式（これは易しい偏微分方程式である）を解いて $w(x,t)$ を求める．そうすれば，元の方程式の解は

$$u = e^{-\beta t} w(x,t)$$
$$u = e^{v\{x-(vt/2)\}/(2\alpha^2)} w(x,t)$$

として求められる（もちろん，境界条件，初期条件も変換しなければならない）．

読者は，前の２課の話から，変数分離で解ける偏微分方程式の型は

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

しかないという印象をもったかもしれない．熱伝導方程式が，変数分離で解くのに一番易しい放物型偏微分方程式であることは事実であるが，変数分離で解ける方程式は決してそれだけではない．すでに述べたように，方程式が線形で

同次であれば，変数分離ができる．たとえば，円内部の2次元の熱流は方程式

$$u_t=\alpha^2\left[u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right]$$

で表される．この式は変数係数であるが，やはり三つの常微分方程式に分離することができる．

この課では，偏微分方程式を直接解こうとするよりも，一旦より易しいものに変換した方がよい場合もあるということを示す．そんな場合には，そのより易しい問題を（変数分離，その他の方法で）解くのがよい．一つの例でこの技巧を説明しよう．

側面熱損失のある熱流問題を側面が絶縁されている問題へ変換すること

次のような問題を考えよう：

(8.1)

偏微分方程式　$u_t=\alpha^2u_{xx}-\beta u\quad(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases}u(0,t)=0\\u(1,t)=0\end{cases}\quad(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=\phi(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$

ここで，偏微分方程式の項 $-\beta u$ は側面をよぎる熱流を表す（図 8.1）．

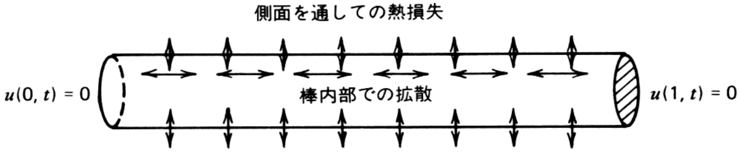


図 8.1　方程式 $u_t=\alpha^2u_{xx}-\beta u$ によって表される熱の流れ

この課の目標は，$u(x,t)$ の代りに新しい温度 $w(x,t)$ を導入し，w についての偏微分方程式が元の式

$$u_t=\alpha^2u_{xx}-\beta u$$

よりも単純な形になるようにすることである．これは偏微分方程式を扱うとき広く使われる方法であって，一般には，元の偏微分方程式の解がどのように振舞うかの直観的感じに基づいて変換の仕方をきめる．たとえば，われわれの問

題 (8.1) では，任意の点 x_0 における温度 $u(x_0, t)$ は，二つの現象

1. 棒内部の熱の拡散（項 $\alpha^2 u_{xx}$ による）

2. 側面を通しての熱流（項 $-\beta u$ による）

の結果として変化する．重要な点は，もし棒の内部での拡散がなければ（$\alpha=0$），各点 x_0 の温度は式

$$u(x_0, t)=u(x_0, 0)e^{-\beta t}$$

に従って指数的に零に向かって“減衰”するであろうということである．この点に着目すれば，問題 (8.1) の温度 $u(x, t)$ を二つの因子の積

$$u(x, t)=e^{-\beta t}w(x, t) \tag{8.2}$$

すなわち

$$\text{非絶縁温度}=e^{-\beta t}\times(\text{絶縁温度})$$

に分解してみたらどうかという考えに至るであろう．ここで $w(x, t)$ は拡散だけによる温度を表す．この式を問題 (8.1) に代入すると何が起きるかを眺めてみよう．この代入計算は全く機械的な計算である（読者が自分でやってみることができる）．すると，

$$\begin{aligned}
&\text{偏微分方程式} \quad w_t=\alpha^2 w_{xx} \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)\\
&\text{境界条件} \quad \begin{cases} w(0, t)=0 \\ w(1, t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty)\\
&\text{初期条件} \quad w(x, 0)=\phi(x) \quad (0\leqslant x\leqslant 1)
\end{aligned} \tag{8.3}$$

という式に到達する．この偏微分方程式は，$-\beta u$ を含まないという点を除いて，最初の問題と全く同じである．したがって，(8.1) を解くためには，変換した問題 (8.3) を解き，解 $w(x, t)$ に $e^{-\beta t}$ を掛けるという手順を経さえすればよい．(8.3) は既に変数分離法を使って解いたことがある．その解は

$$\begin{aligned}
w(x, t)&=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x)\\
a_n&=2\int_0^1 \phi(\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi
\end{aligned} \tag{8.4}$$

であった．ゆえに，元の問題 (8.1) の解は

$$u(x, t)=e^{-\beta t}w(x, t)$$

である．次の“注意”の中の例もこの方法で解いてある．

注意

1. 問題

$$u_t = u_{xx} - u \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$$

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty)$$

$$u(x,0)=\sin(\pi x)+0.5\sin(3\pi x)$$

は上記の技法を使って以下のようにして解ける：

（a） とりあえず項 $-u$ を無視する

（b） $-u$ の項がない初期値・境界値問題を解いて

$$u(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)+0.5\,e^{-(3\pi)^2 t}\sin(3\pi x)$$

を得る

（c） この解に因子 $e^{-\beta t}=e^{-t}$ を掛けて解

$$u(x,t)=e^{-t}[e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)+0.5\,e^{-(3\pi)^2 t}\sin(3\pi x)]$$

を得る

2. 拡散・対流方程式

$$u_t=\alpha^2 u_{xx}-vu_x$$

（v は定数）も

$$w_t=\alpha^2 w_{xx}$$

という形に変換できる．この場合の変換は

$$u(x,t)=e^{v\{x-(vt/2)\}/(2\alpha^2)}w(x,t)$$

である．この変換の本質は，媒質の動きによる部分（指数関数の因子）を解からくくり出すというところである．指数関数の因子は速度 $v/2$ での右方への動きを表す項 $x-vt/2$ の指数関数から成っていることに注意せよ．以下の練習問題の中で，この変換を利用する機会があるであろう．

練習問題

1. 拡散問題

偏微分方程式 $u_t=u_{xx}-u_x \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件 $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty)$

初期条件 $u(x,0)=e^{x/2} \quad (0\leqq x\leqq 1)$

を，より易しい問題に変換して，解け．解はどんな形をしているか．この問題は，（左から右へ速度 $v=1$ で）動いている媒質の中の物質濃度 $u(x,t)$ の変化を表していると解釈できる．ここで，媒質の端における濃度は（濾過器等により）零に保たれ，初期濃度は $e^{x/2}$ である．求めた解はこの解釈とうまく合っているか．

2. 問題

偏微分方程式　$u_t=u_{xx}-u+x \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=1 \end{cases} \quad (0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$

を次の方法で解け：

（a）非同次境界条件を同次境界条件に変換する

（b）項 $-u$ を含まない新しい方程式に変換する

（c）その結果得られる問題を解く

3. 偏微分方程式　$u_t=u_{xx}-u \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=\sin(\pi x) \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$

をあらかじめ変換しないで直接変数分離によって解け．こうして得られる解が，あらかじめ変換

$$u(x,t)=e^{-t}w(x,t)$$

を行ったときに得られる解と一致するか．

参考書

W. F. Ames, *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*, Academic Press, 1965. この本は多くの型の変換について述べている．その中には，非線形問題を線形問題に変える変換さえある．

第9課　非同次偏微分方程式の解法 (固有関数展開)

目的：　初期値・境界値問題

偏微分方程式　$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t)$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} \alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = 0 \\ \alpha_2 u_x(1, t) + \beta_2 u(1, t) = 0 \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x, 0) = \phi(x)$　$(0 \leqslant x \leqslant 1)$

の解き方を示すこと．非同次偏微分方程式は，随伴同次問題

偏微分方程式　$u_t = \alpha^2 u_{xx}$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} \alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = 0 \\ \alpha_2 u_x(1, t) + \beta_2 u(1, t) = 0 \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x, 0) = \phi(x)$　$(0 \leqslant x \leqslant 1)$

の解として得られる固有関数を $X_n(x)$ とし，ある一連の常微分方程式を解いて求まる関数を $T_n(t)$ として，

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

という形の級数解を見いだすことにより解くことができる．

第6課では，非同次境界条件を同次境界条件に変換する方法の話をした．しかし，具合の悪いことに，その変換の際，偏微分方程式の非同次項はそのまま残っていたので，そのような変換をした結果，われわれには

偏微分方程式　$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t)$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

(9.1)　境界条件　$\begin{cases} \alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = 0 \\ \alpha_2 u_x(1, t) + \beta_2 u(1, t) = 0 \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x, 0) = \phi(x)$　$(0 \leqslant x \leqslant 1)$

という問題が残された．この課の目的は，**固有関数展開法**と呼ばれている方法でこの問題を解くことである．この方法は常微分方程式のパラメータ変化法と類似の方法である．

考え方は全く単純である．$f(x,t)=0$ のときの (9.1) (いわゆる随伴同次問題) の解は，Sturm-Liouville 問題

$$X''+\lambda^2 X=0$$
$$\alpha_1 X'(0)+\beta_1 X(0)=0 \tag{9.2}$$
$$\alpha_2 X'(1)+\beta_2 X(1)=0$$

の固有関数を $X_n(x)$ として,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n \alpha)^2 t} X_n(x)$$

で与えられるから，非同次問題 (9.1) の解がもう少し一般的な形

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

で書けるのではないか調べてみよう．このような推測をするには物理的にもっともな理由がある．なぜならば，問題における熱源が初期条件の温度だけであったときに減衰因子

$$e^{-(\lambda_n \alpha)^2 t}$$

があったのであるから，棒の内部に熱源 $f(x,t)$ があれば初期時点以外にも新しい時間成分が現れてもよさそうである．

固有関数展開法による解

非同次問題

$$\text{偏微分方程式}\quad u_t=\alpha^2 u_{xx}+f(x,t)\quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$$

$$\text{境界条件}\quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty) \tag{9.3}$$

$$\text{初期条件}\quad u(x,0)=\phi(x)\quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

を考えよう．この問題を解くための手順を次のようなステップに分けよう．

〈ステップ 1〉　この方法の基本的な考え方は，熱源 $f(x,t)$ を簡単な成分に分解し：

$$f(x,t)=f_1(t)X_1(x)+f_2(t)X_2(x)+\cdots+f_n(t)X_n(x)+\cdots,$$

そのそれぞれの成分 $f_n(t)X_n(x)$ に対する応答 $u_n(x,t)$ を求めることである．

そうすればわれわれの問題に対する解は

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$$

と書ける．$f(x,t)$ をどうやって成分 $f_n(t)X_n(x)$ に分解するかが主な問題の一つである．この問題における $X_n(x)$ という因子は，(9.3) の随件同次問題

(9.4)
$$u_t=\alpha^2u_{xx}\quad（ここでは\ f(x,t)=0\ であることに注意せよ）$$
$$\begin{cases}u(0,t)=0\\ u(1,t)=0\end{cases}$$
$$u(x,0)=\phi(x)$$

を変数分離で解いたときに得られる Sturm–Liouville 系の固有ベクトル（固有関数）にとればよいことがわかるであろう．今の場合，変数分離により得られる Sturm–Liouville 問題は

$$X''+\lambda^2X=0$$
$$X(0)=0$$
$$X(1)=0$$

であるから，$X_n(x)$ は

$$X_n(x)=\sin(n\pi x)\quad(n=1,2,\cdots)$$

である．したがって，熱源 $f(x,t)$ の分解は

(9.5)　$f(x,t)=f_1(t)\sin(\pi x)+f_2(t)\sin(2\pi x)+\cdots+f_n(t)\sin(n\pi x)+\cdots$

という形をとる．

関数 $f_n(t)$ を求めるには，この式の両辺に $\sin(m\pi x)$ を掛けて 0 から 1 まで（x に関して）積分すればよい．すなわち，

$$\int_0^1 f(x,t)\sin(m\pi x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\int_0^1\sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx$$
$$=\frac{1}{2}f_m(t)$$

あるいは（m を n に変えて）

(9.6)
$$f_n(t)=2\int_0^1 f(x,t)\sin(n\pi x)dx$$

である．これが係数 $f_n(t)$ を熱源 $f(x,t)$ で表す式である．

〈**ステップ 2**〉（入力 $f_n(t)X_n(x)$ に対する応答 $u_n(x,t)=T_n(t)X_n(x)$ を求める）

熱源の式 $f(x,t)$ を

$$f(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin (n\pi x)$$

のように分解したもので置き変え，個々の成分に対する応答

$$u_n(x, t)=T_n(t) \sin (n\pi x)$$

を求めよう．すなわち，関数 $T_n(t)$ を探す．これがわかればわれわれの問題の答えは

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin (n\pi x)$$

と書ける．$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin (n\pi x)$ を式

$$\begin{aligned} &u_t=\alpha^2 u_{xx}+\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin (n\pi x) \\ &u(0, t)=0 \\ &u(1, t)=0 \\ &u(x, 0)=\phi(x) \end{aligned}$$

に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \sin (n\pi x)=-\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 T_n(t) \sin (n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin (n\pi x)$$

(9.7)

$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin 0=0$　(0=0 であるから恒等式で，何の条件にもならない)

$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin (n\pi)=0$　(0=0 であるから恒等式で，何の条件にもならない)

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin (n\pi x)=\phi(x)$$

が得られる．偏微分方程式と初期条件を書き変えると，

偏微分方程式　$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n'+(n\pi\alpha)^2 T_n-f_n(t)] \sin (n\pi x)=0$

初期条件　$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin (n\pi x)=\phi(x)$

となるので，$T_n(t)$ は簡単な初期値問題

$$(9.8)\qquad \begin{aligned} &T_n' + (n\pi\alpha)^2 T_n = f_n(t) \\ &T_n(0) = 2\int_0^1 \phi(\xi)\sin(n\pi\xi)\,d\xi = a_n \end{aligned}$$

を満足する解であることが容易にわかる．これらの常微分方程式は簡単に解けるものの一つであり（積分因子を使う），解は

$$(9.9)\qquad T_n(t) = a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} + \int_0^t e^{-(n\pi\alpha)^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau$$

である．したがって，問題 (9.3) の解は

$$(9.10)\qquad \begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(n\pi x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin(n\pi x)\int_0^t e^{-(n\pi\alpha)^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right] \end{aligned}$$

過渡成分（初期条件の影響を表す項）　　　定常状態（右辺の $f(x,t)$ の影響を表す項）

となる．この解の形から，温度応答は二つの成分によることがわかる．すなわち，第1の成分は初期条件によるもので第2の成分は熱源 $f(x,t)$ によるものである．“定常”という言葉は第2の成分の呼び名としてはあまり適当ではない．なぜならば，その成分は必ずしも静止状態になるわけではないからである（$f(x,t)$ が t に関して周期的であればこれは周期的な定常状態に近づく）．

これでこの問題は終わりであるが，最後にこの方法の具体的な適用例を示そう．

固有関数展開法による問題の解

簡単な問題

$$(9.11)\qquad \begin{aligned} &\text{偏微分方程式}\quad u_t = \alpha^2 u_{xx} + \sin(3\pi x) \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty) \\ &\text{境界条件}\quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty) \\ &\text{初期条件}\quad u(x,0)=\sin(\pi x) \quad (0\leqslant x\leqslant 1) \end{aligned}$$

を考えよう．われわれの目標は展開式

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(n\pi x)$$

における係数 $T_n(t)$ を計算することである（この問題の固有関数 $X_n(x)$ も前

と同じである). この展開式を問題の式に代入すると，関数 $T_n(t)$ についての常微分方程式，すなわち

$$T_n' + (n\pi\alpha)^2 T_n = f_n(t) = 2\int_0^1 \sin(3\pi x)\sin(n\pi x)dx = \begin{cases} 1 & n=3 \\ 0 & n\neq 3 \end{cases}$$

$$T_n(0) = 2\int_0^1 \sin(\pi\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$$

が得られる．この式を $n=1,2,\cdots$ について書き下し，解くと，

$$(n=1)\qquad \left.\begin{aligned} &T_1' + (\pi\alpha)^2 T_1 = 0 \\ &T_1(0) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_1(t) = e^{-(\pi\alpha)^2 t}$$

$$(n=2)\qquad \left.\begin{aligned} &T_2' + (2\pi\alpha)^2 T_2 = 0 \\ &T_2(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_2(t) = 0$$

$$(n=3)\qquad \left.\begin{aligned} &T_3' + (3\pi\alpha)^2 T_3 = 1 \\ &T_3(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_3(t) = \frac{1}{(3\pi\alpha)^2}(1-e^{-(3\pi\alpha)^2 t})$$

$$(n\geqslant 4)\qquad \left.\begin{aligned} &T_n' + (n\pi\alpha)^2 T_n = 0 \\ &T_n(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_n(t) = 0$$

となる．したがって問題の解は

$$(9.12)\qquad u(x,t) = e^{-(\pi\alpha)^2 t}\sin(\pi x) + \frac{1}{(3\pi\alpha)^2}(1-e^{-(3\pi\alpha)^2 t})\sin(3\pi x)$$

↗ 過渡成分（初期条件の影響）　　↖ 定常状態（偏微分方程式の右辺の影響）

である．

注意

1. 固有関数展開法は非同次偏微分方程式を解く最も強力な方法の一つである．後で積分変換を学ぶ際に，非同次偏微分方程式を解くにはまだ別の方法もあることがわかるであろう．
2. 展開式の中の固有関数 $X_n(x)$ は偏微分方程式と境界条件によるので，問題ごとに異なる．読者はこの課の練習問題4を見て，固有関数 $X_n(x)$ の求め方が修得できていることを確かめられたい．
3. 常微分方程式論で

$$P_n(x)e^{\alpha x}\begin{cases}\sin(\beta x)\\\cos(\beta x)\end{cases}$$

というような非同次項をもつ線形方程式の解が未定係数法で求められたということを思い出してほしい．問題(9.11)はこの方法でも解ける．この方法に興味をもつ読者はこの課の終わりに挙げてある参考書を見てほしい．

練習問題

1. 問題

偏微分方程式 $u_t=u_{xx}+\sin(3\pi x)\quad(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件 $\begin{cases}u(0,t)=0\\u(1,t)=0\end{cases}\quad(0<t<\infty)$

初期条件 $u(x,0)=\sin(\pi x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$

の解は (9.12) で与えられる．この解は直観と一致するか．この解はどんな形をしているか．

2. 問題

偏微分方程式 $u_t=u_{xx}+\sin(\pi x)+\sin(2\pi x)\quad(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件 $\begin{cases}u(0,t)\\u(1,t)\end{cases}\quad(0<t<\infty)$

初期条件 $u(x,0)=0\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$

を解け．

3. 問題

偏微分方程式 $u_t=u_{xx}+\sin(\pi x)\quad(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件 $\begin{cases}u(0,t)=0\\u(1,t)=0\end{cases}\quad(0<t<\infty)$

初期条件 $u(x,0)=1\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$

を固有関数展開法で解け．

4. 偏微分方程式 $u_t=u_{xx}+\sin(\lambda_1 x)\quad(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件 $\begin{cases}u(0,t)=0\\u_x(1,t)+u(1,t)=0\end{cases}\quad(0<t<\infty)$

初期条件 $u(x,0)=0\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$

の解を固有関数展開法で求めよ．ただし，λ_1 は $\tan\lambda=-\lambda$ の第1の解である．この問題の固有関数 $X_n(x)$ は何か．

5. 問題

偏微分方程式 $u_t=u_{xx}\quad(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=\cos t \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=x$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$

を次の方法で解け：

（a）　まず，境界条件が零であるような問題に変換する

（b）　その結果得られる問題を固有関数で展開することにより解く

参考書

P. W. Berg, J. L. McGregor, ***Elementary Partial Differential Equations***, Holden-Day, 1966. 広く読まれている偏微分方程式の教科書の一つである．程度は本書より少々高く，きちんと書かれている．非同次問題をたくさん扱った節がある．

第10課　積分変換(正弦変換と余弦変換)

目的：積分変換の考え方を導入し，n 変数の偏微分方程式を $n-1$ 変数の微分方程式に変換する方法を示すこと．

この変換が次のように解釈できることも示す：問題の入力を簡単な成分に分解し（周波数分解），各成分に対応する解を求め，その結果を再び加えて合成する．

要するに，積分変換は微分演算を掛算に変えてしまうものである．したがって，ある種の偏導関数は代数式に変えられる．

正弦変換と余弦変換を導入し，無限拡散問題を解くのに使う．この解は，余誤差関数を含んでいるので興味深い．

積分変換とは，単に，ある関数 $f(t)$ に対して

$$F(s)=\int_A^B K(s,t)f(t)dt$$

という公式によって，新しい関数 $F(s)$ を対応づける変換のことである．出発点が t の関数で行先が s の関数であることに注意せよ．関数 $K(s,t)$ は**変換の核**と呼ばれ，変換の種類を特徴づける主たる要素である．変換の核は，変換が望ましい性質をもつように選ぶ．積分の上下限 A, B も変換によって異なる．

積分変換に共通した原理は，一つの変数に関する偏導関数を消去することである．したがって，新しい式では変数が1個減っている．たとえば，偏微分方程式

$$u_t=u_{xx}$$

に対して時間微分を消去する目的で変換を適用すると，x についての常微分方程式になる．ところが，偏微分方程式が

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$$

で，変数 x について Fourier 変換を適用すると，導関数 u_{xx} が消去され，

y と z についての新しい偏微分方程式が得られる．もちろん，もう一つの変数を消去するようにもう一度 Fourier 変換を行うこともできる（そして最後に残る変数についての常微分方程式が得られる）．このように，積分変換は問題をより易しいものに変える．そうした後で，その変換後の問題を解き，次いでその逆変換を求めれば元の問題の解が得られる．この一般方針が図 10.1 に示してある．

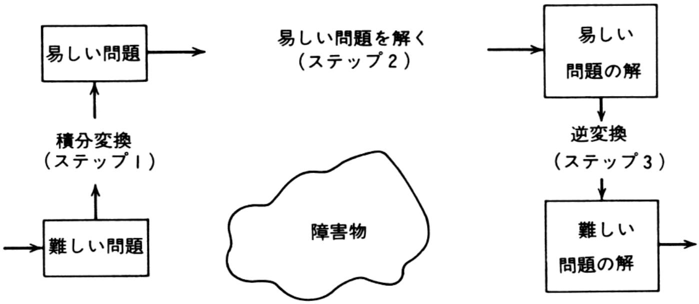


図 10.1　積分変換の原理

図 10.1 で示したいのは，すべての積分変換には逆変換が存在すること，そして変換後の関数から元の関数を作り出すのが逆変換であるということである．変換とその逆変換とを対にしたものを変換対と呼ぶ．表 10.1 には偏微分方程式を解くのによく使われる変換対が一覧表にしてある．

これらの変換の中で二通りの記号を使っていることに注意せよ．たとえば，Laplace 変換の場合，記号 $\mathcal{L}[f]$ は関数 f を変換したものであるということを示しており，もう一方の記号 $F(s)$ は変換後の s の関数を示している．

この課でこれらの変換対すべてを学ぼうというわけではない．この課では正弦変換と余弦変換（表 10.1 の 1 と 2）だけを取り上げる．後の課で他の変換をいくつか学ぶことにする．異なる変換の間の関係，どのような場合にどんな変換を用いるべきか，各変換の長所と短所，等々の疑問には，これから話を進めながら随時答えを出して行く．しかし，積分変換を学び始める前に，いわゆる関数のスペクトル（あるいは関数のスペクトル分解）について学ぶのが得策であろう．

表 10.1 よく使われる変換対

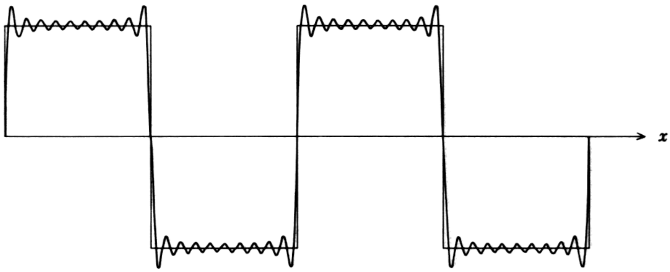
変換対
1. $\begin{cases} \mathcal{F}_s[f]=F(\omega)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)dt & \text{(Fourier 正弦変換)} \\ \mathcal{F}_s^{-1}[F]=f(t)=\displaystyle\int_0^\infty F(\omega)\sin(\omega t)d\omega & \text{(逆正弦変換)} \end{cases}$
2. $\begin{cases} \mathcal{F}_c[f]=F(\omega)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)dt & \text{(Fourier 余弦変換)} \\ \mathcal{F}_c^{-1}[F]=f(t)=\displaystyle\int_0^\infty F(\omega)\cos(\omega t)d\omega & \text{(逆余弦変換)} \end{cases}$
3. $\begin{cases} \mathcal{F}[f]=F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}dx & \text{(Fourier 変換)} \\ \mathcal{F}^{-1}[F]=f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty F(\omega)e^{i\omega x}d\omega & \text{(逆 Fourier 変換)} \end{cases}$
4. $\begin{cases} \mathcal{F}_s[f]=S_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)dx & \text{(有限正弦変換)} \\ \mathcal{F}_s^{-1}[F_n]=f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^\infty S_n\sin(n\pi x/L) & \text{(逆有限正弦変換)} \end{cases}$
5. $\begin{cases} \mathcal{F}_c[f]=C_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos(n\pi x/L)dx & \text{(有限余弦変換)} \\ \mathcal{F}_c^{-1}[F_n]=f(x)=\dfrac{C_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^\infty C_n\cos(n\pi x/L) & \text{(逆有限余弦変換)} \end{cases}$
6 $\begin{cases} \mathcal{L}[f]=F(s)=\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt & \text{(Laplace 変換)} \\ \mathcal{L}^{-1}[F]=f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds & \text{(逆 Laplace 変換)} \end{cases}$
7. $\begin{cases} H[f]=F_n(\xi)=\displaystyle\int_0^\infty rJ_n(\xi r)f(r)dr & \text{(Hankel 変換)} \\ H^{-1}[F_n]=f(r)=\displaystyle\int_0^\infty J_n(\xi r)F_n(\xi)d\xi & \text{(逆 Hankel 変換)} \end{cases}$

関数のスペクトル

積分変換と関数のスペクトルとは密接に関係している．実際，**積分変換**は関数をある種のスペクトル成分に分解することであると考えることができる．ある変換が実際に関数をどんな風に分解するのかは，変換ごとに異なるけれども，いずれにしても関数は何かの意味での成分に分解されることになっているのである．

たとえば，周期関数 $f(x)$ を正弦関数，余弦関数に分解すること（Fourier 級数）* を考えよう（図 10.2）：

* Fourier 級数については第 11 課で詳しく話をする．



正弦関数と余弦関数により近似された矩形波

図 10.2　周期関数を正弦関数と余弦関数とに展開すること

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[A_n\cos(nx)+B_n\sin(nx)]$$

ここで，係数 A_n, B_n は，それぞれ，$f(x)$ の $\cos(nx)$ 成分と $\sin(nx)$ 成分の大きさを表し，平方根

$$\sqrt{A_n{}^2+B_n{}^2}$$

(**関数のスペクトル**と呼ぶ) は $f(x)$ の周波数 n の成分の大きさを示す.

たとえば，関数 $f(x)$ が正弦関数と余弦関数の簡単な和

$$f(x)=1+\sin x+\frac{1}{5}\sin(3x)+\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\cos(4x)$$

であるなら，その (離散) スペクトルは図 10.3 で与えられるようなものにな

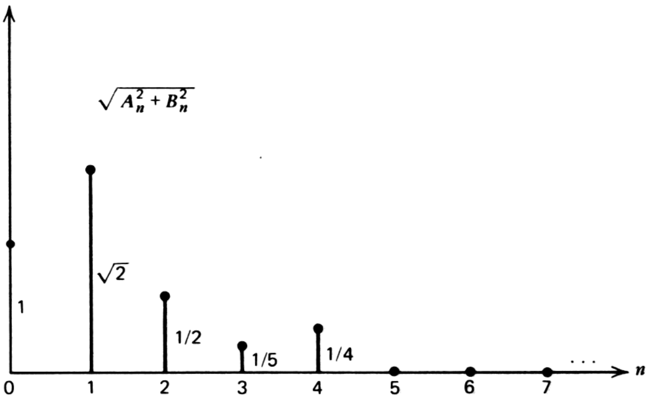


図 10.3　$f(x)$ の離散スペクトル

るであろう．$\sqrt{A_n^2+B_n^2}$ の値を読み取れば，$f(x)$ の周波数 n の成分の大きさがわかる．

周期関数は無限級数（離散スペクトルをもつ）に分解できる．一方，非周期関数は連続スペクトルに分解しなければならない（もちろん，関数が有限区間だけで定義されているときは，それを区間の外に周期的に拡張すれば，その区間内での関数の Fourier 級数表示を得ることができる）．

たとえば，非周期関数 $f(x)$ は正弦関数と余弦関数の無限級数で表示することはできないが，それを Fourier 級数の連続版とでもいうようなものを使って表してみようとするのは自然であろう．すなわち，

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[C(\omega)\cos(\omega x)+S(\omega)\sin(\omega x)]d\omega$$

という表現を考えてみる．ここで，関数 $S(\omega)$ と $C(\omega)$ とは $f(x)$ の正弦成分と余弦成分を表し，

$$\sqrt{S^2(\omega)+C^2(\omega)}$$

は $f(x)$ の角周波数 ω の成分で，$f(x)$ のスペクトル（連続スペクトル）と呼ばれる．

関数のスペクトルについてはこのような直観的な説明でひとまず済ませておいて，次に，積分変換の肝心な話をすることにしよう．まず第一に，積分変換のいくつかの性質を表にして掲げるのがよかろう．これらの性質があるために積分変換が有用なのである．

導関数の正弦変換と余弦変換

(10.1)

1. $\mathcal{F}_s[f']=-\omega\mathcal{F}_c[f]$ （部分積分で証明できる）
2. $\mathcal{F}_s[f'']=\dfrac{2}{\pi}\omega f(0)-\omega^2\mathcal{F}_s[f]$
3. $\mathcal{F}_c[f']=-\dfrac{2}{\pi}f(0)+\omega\mathcal{F}_s[f]$
4. $\mathcal{F}_c[f'']=-\dfrac{2}{\pi}f'(0)-\omega^2\mathcal{F}_c[f]$

いろいろな関数の正弦変換，余弦変換，逆変換，その他の性質が巻末の表に挙げてある．さて，重要な初期値・境界値問題を正弦変換によって解く方法を示そう．

無限拡散問題の正弦変換による解

われわれが関心をもつのは次の無限拡散問題である（図 10.4）：

偏微分方程式　$u_t=\alpha^2u_{xx}$　$(0<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$u(0,t)=A$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=0$　$(0\leqslant x<\infty)$

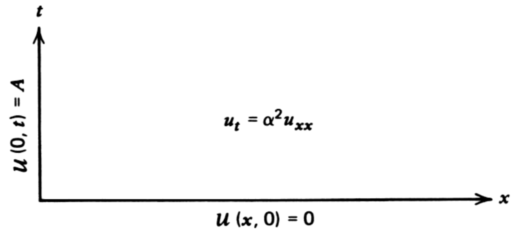


図 10.4　半無限媒質中の拡散問題

〈ステップ 1〉　三つの簡単なステップに分けてこれを解く．まず第一にすることは，変数 x を Fourier 正弦変換によって変換して時間についての常微分方程式を作ることである．すなわち

$$\mathcal{F}_s[u_t]=\alpha^2\mathcal{F}_s[u_{xx}]$$

両辺を別々に考えてみよう．

$\mathcal{F}_s[u_t]$：この問題の偏微分 u_t は，変換が x に関してであるから，変換には無関係な微分である．今の場合，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s[u_t]&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u_t(x,t)\sin(\omega x)dx\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u(x,t)\sin(\omega x)dx\right]\\&=\frac{d}{dt}\mathcal{F}_s[u]\\&=\frac{d}{dt}U(t)\end{aligned}$$

となる．微分を積分の外に出してよいということは，微積分学の教えるところである．u は x と t の関数であるが，変換後の形

$$\mathcal{F}_s[u]=U(\omega,t)$$

は ω と t の関数である．新しい変数 ω は新しい問題においては一つのパラメータのように扱われる．したがって，正弦変換をした後の関数は t だけの関数であるといえる：

$$\mathcal{F}_s[u]=U(t)$$

$\mathcal{F}_s[u_{xx}]$：これに対しては，次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s[u_{xx}]&=\frac{2}{\pi}\omega u(0,t)-\omega^2\mathcal{F}_s[u]\\&=\frac{2}{\pi}\omega u(0,t)-\omega^2U(t)\\&=\frac{2A\omega}{\pi}-\omega^2U(t)\end{aligned}$$

(10.1) では1変数の関数 $f(x)$ に対して上の公式を示したことに注意せよ．$u(x,t)$ は x と t の関数であるから，ここではそれを少々修正したものを使っていることになる．変換に関係する変数について公式を用い，他の変数は定数として扱わなければならない．今の場合，x に関する変換を行っているのであるから，t は定数として扱われている．われわれの演算のこの段階で，境界条件 $u(0,t)=A$ が使われていることにも注意せよ．

これらの式を偏微分方程式に代入すると，常微分方程式

$$\frac{dU}{dt}=\alpha^2\left[-\omega^2U(t)+\frac{2A\omega}{\pi}\right]$$

が得られる．まだ使っていないのは $U(t)$ の初期条件だけである．初期条件 $u(x,0)=0$ を変換すると

$$\mathcal{F}_s[u(x,0)]=U(0)=0$$

となる．これで変換の手順の第1ステップは終わりである．結局，元の問題は次のような常微分方程式の初期値問題に変えられたことになる：

(10.2)　常微分方程式　$\dfrac{dU}{dt}+\omega^2\alpha^2U=\dfrac{2A\omega\alpha^2}{\pi}$

初期条件　$U(0)=0$

〈ステップ 2〉　この初期値問題を解くには，常微分方程式論における基本的な技術をいろいろと使うことができる（積分因子，同次解と特殊解，等）．いずれにしろ，今の場合の解は

$$U(t)=\frac{2A}{\pi\omega}(1-e^{-\omega^2\alpha^2 t})$$

である．これで答え $u(x,t)$ の正弦変換が求まった．最後のステップは $U(t)$ の逆変換を求めることである．すなわち，

$$u(x,t)=\mathcal{F}_s{}^{-1}[U]$$

〈ステップ 3〉 解を求めるには，直接逆変換の公式の積分をするか，あるいは表を引くかのどちらによってもよい．表を使うと，

$$u(x,t)=A\,\mathrm{erfc}\,(x/(2\alpha\sqrt{t}))$$

であることがわかる．ここで，erfc (x) $(0<x<\infty)$ は**余誤差関数**と呼ばれ，

$$\mathrm{erfc}\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt$$

で与えられる．そのグラフは図 10.5 の通りである．

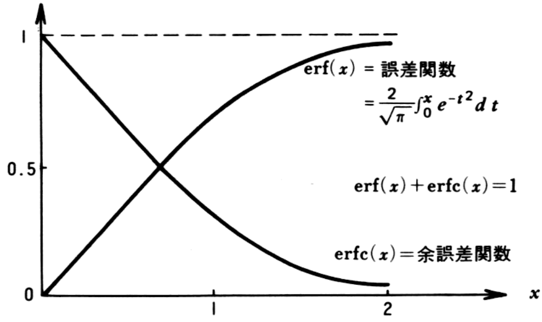


図 10.5　誤差関数 erf (x) と余誤差関数 erfc (x)

これらはよく知られた関数でその正確な値はたいていの物理や化学の表にのっている．これらの積分は微積分の普通の初等的なやり方では積分できないことにも注意すべきである．

解の意味

解

$$u(x,t)=A\,\mathrm{erfc}\,(x/(2\alpha\sqrt{t}))$$

からたくさんのことがわかる．時刻が異なるのに応じて，余誤差関数のグラフは x 軸方向のスケールを変えた形になる．時間が増すにつれて，誤差関数のグラフは引き伸ばされる．いろいろな時刻における解のグラフが図 10.6 に示してある．

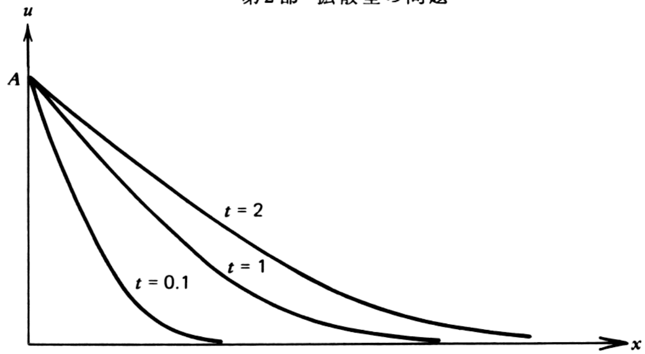


図 10.6　一端が一定の温度 A に保たれている半無限棒の解

練習問題

1. 等式（10.1）を証明せよ．
2. 常微分方程式の問題（10.2）を解け．
3. 正弦変換あるいは余弦変換により

偏微分方程式　$u_t=\alpha^2 u_{xx}$　$(0<x<\infty)$

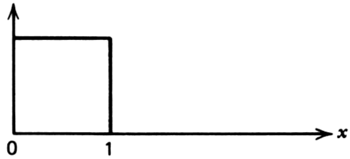
境界条件　$u_x(0,t)=0$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=H(1-x)$　$(0\leqslant x<\infty)$

を解け．ここで $H(x)$ はHeaviside（ヘビサイド）関数

$$H(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1 & (0\leqslant x)\end{cases}$$

である．いいかえれば，初期条件は



のような形をしている．いろいろな時刻における解のグラフはどのようなか．

4. $F(\omega)=c$（定数）の逆余弦変換を求めよ．

参考書

1. R. V. Churchill, *Operational Mathematics*, McGraw-Hill, 1958. 多くの積分変換を網羅している優れた教科書である. よい問題があり多くの表が載っている.
2. A. Erdelyi, *Tables of Integral Transform*, McGraw-Hill, 1954. 積分変換の最も広範な表の一つである.
3. C. J. Tranter, *Integral Transforms in Mathematical Physics*, Chapman and Hall (Science Paperbacks), 1971. 小さいが簡潔に書かれた紙表紙の本である. 例が多くて読みやすい.

第11課　Fourier 級数と Fourier 変換

目的：　Fourier（フーリエ）級数という概念を導入し，周期関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)]$$

という正弦関数と余弦関数の和の形に表す方法を示すこと．無限区間 $(-\infty,\infty)$ における非周期関数の場合に，Fourier 級数が Fourier 変換に置き変えられること，そして関数 $f(x)$ を簡単な関数の連続的な成分に分解する方法を示す．この分解（Fourier 積分）は複素数の形で次のようにも書くこともできる：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx\right]e^{i\xi x}d\xi$$

これより Fourier 変換と逆 Fourier 変換の次のような変換対が得られる：

$$\mathcal{F}[f]=F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx \quad (\text{Fourier 変換})$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F]=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)e^{i\xi x}d\xi \quad (\text{逆 Fourier 変換})$$

偏微分方程式論において Fourier 級数が重要なのは，$(-\infty,\ \infty)$ で定義された周期関数 $f(x)$，あるいは，同じことだが，有限区間で定義された関数が正弦関数と余弦関数の無限級数で表現できるので，そのようにして問題を簡単な問題に分解できるという点にある．たとえば，図 11.1 に示すようないわゆる鋸波（鋸歯状波）

$$f(x)=x \quad (-L<x<L)$$

$$f(x+2L)=f(x) \quad (\text{周期条件})$$

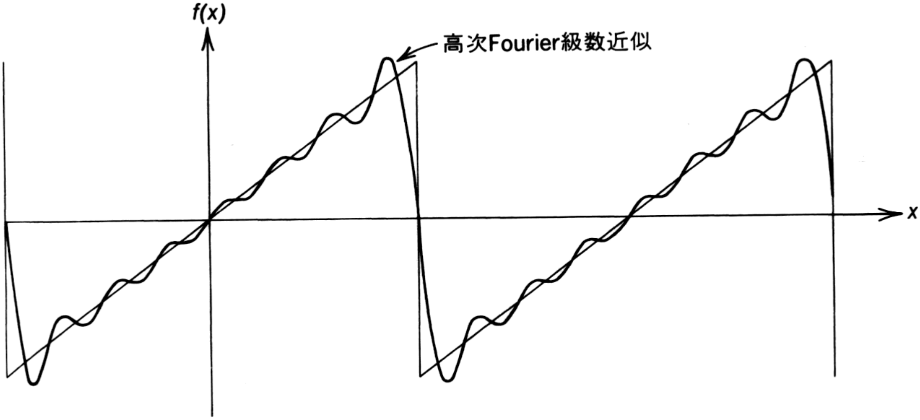


図 11.1　鋸波とその Fourier 級数表現（初めの 7 項までの和）

は Fourier 級数により

(11.1)★ $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L)+b_n\sin(n\pi x/L)\right]$$

と表現できる．ここで，**Fourier 係数** a_n, b_n は **Euler（オイラー）の公式**

(11.2)
$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos(n\pi x/L)dx=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$
$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin(n\pi x/L)dx=-(2L/n\pi)(-1)^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

により与えられる．この積分の計算は微積分の定跡的なやり方でできる．a_n, b_n を表す Euler の公式は，式 (11.1) の両辺に $\sin(nx)$ あるいは $\cos(nx)$ を掛けて $-L$ から L まで積分すれば得られる．そして，関数 $\sin(n\pi x/L)$ および $\cos(n\pi x/L)$ には直交性があるので，係数 a_n, b_n が求められる（練習問題 6 を見よ）．鋸波の Fourier 級数表現は

(11.3) $$f(x)=\frac{2L}{\pi}\left[\sin(\pi x/L)-\frac{1}{2}\sin(2\pi x/L)+\frac{1}{3}\sin(3\pi x/L)-\cdots\right]$$

である．ここで，各項（**高調波と呼ぶ**）**はその前の項より周波数が高い**．そして，それら各項の周波数は，関数 $f(x)$ と同じ周期をもつ基本周波数の整数倍である．

Fourier 級数の欠点の一つは，Fourier 級数表現のできる関数は周期関数でなければならないという点である．もちろん，もし有限区間で定義された関数

(たとえば $0 \leqslant x \leqslant 1$ で $f(x)=x$) を展開したいのであれば展開式 (11.1) が使える．このとき，Fourier 級数が区間 $[0,1]$ の外で周期的であるかどうかは関係ない．何故ならば，問題にしているのは区間内の関数のことだけだからである．実際，いろいろなやり方で関数を区間外に拡張することによって区間内の関数をいろいろな形の Fourier 級数で表現することができる（拡張の仕方によって収束の速さも異なる）．

すべての周期関数が Fourier 級数展開によって表現できると考えてしまってはいけない．わかっていることは，関数 $f(x)$ が Fourier 級数 (11.1) によって表現できるときには係数 a_n, b_n は Euler の公式 (11.2) によって与えられるということである．さらに，たとえ関数 $f(x)$ が Fourier 級数で表現できても，導関数 $f'(x)$ が級数を項別に微分することにより求まるというわけでは必ずしもない．実際，$f(x)=x$（鋸波）の導関数は，Fourier 級数 (11.3) の各項を微分しても求まらないということは容易にわかる．それどころか，(11.3) を項別に微分した級数はどんな x に対しても収束さえしない（このことを読者は自分で確かめてみられたい）．

関数 $f(x)$ が Fourier 級数表現できるための正確な条件およびその表現が項別に微分できることを保証する正確な条件は，この課の終わりにあげてある参考書に書かれている．ここでの目的のためには，次の P. G. Dirichlet（ディリクレ）の定理という重要な結果を知るだけで十分である．

★Dirichlet の定理（関数が Fourier 級数表現できるための十分条件）：
$f(x)$ が有界な周期関数で，各周期中，有限個の極大点，極小点，不連続点しか含まないならば，$f(x)$ の Fourier 級数は，$f(x)$ が連続なところでは各点 x における $f(x)$ に収束し，$f(x)$ が不連続なところではその不連続点における $f(x)$ の左極限と右極限の平均値に収束する．

たとえば，図 11.1 において，鋸波の Fourier 級数は，$x=\pm L,\ \pm 3L, \cdots$（不連続点）を除くすべての x に対して関数 $f(x)$ に収束し，これらの不連続点では 0（$+L$ と $-L$ の平均）に収束する．

これで Fourier 変換へと進む準備はほとんど整ったわけであるが，Fourier 変換に入る前に，周期関数の周波数スペクトルという概念を導入しておくのがよい．

周期関数の離散周波数スペクトル

周期関数 $f(x)$ を Fourier 級数で表すということは，周期関数 $f(x)$ を数列 $\{c_n\}$

$$c_n=\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

で置き変えることであるとも解釈できる．ここで，数 c_n は種々の周波数成分が関数 $f(x)$ にそれぞれどのくらい寄与しているかを測る量であると考えてよい．たとえば，鋸波 $f(x)$ の Fourier 級数展開は

$$f(x)=\frac{2L}{\pi}\left[\sin(\pi x/L)-\frac{1}{2}\sin(2\pi x/L)+\frac{1}{3}\sin(3\pi x/L)-\cdots\right]$$

であるから，周波数スペクトル $\{c_n\}$ は $c_n=2L/(n\pi)$ $(n=1,2,\cdots)$ と $c_0=|a_0|=0$ とである（図 11.2）．

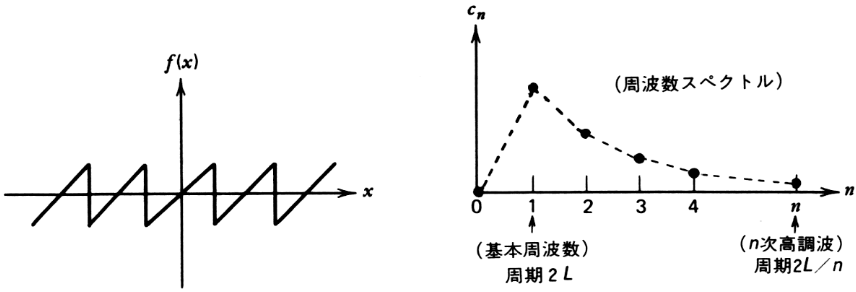


図 11.2　鋸波の離散周波数スペクトル

数列 $\{c_n\}$ は，白色光を分光器によっていろいろな周波数の色のスペクトルに分解したものにも似ている．さていよいよ Fourier 変換の話に入ろう．

Fourier 変換

Fourier 級数表現に伴う一番の難点は，$(-\infty,\infty)$ で定義された非周期関数が表現できないということである．しかし，これらの関数のうちあるものには類似の表現を見いだすことが可能である．証明など細部に立ち入らずにざっと述べると，周期関数の Fourier 級数表現（離散周波数分解）

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\pi x/L)+b_n\sin(n\pi x/L)]$$

に類似の Fourier 積分表現（連続周波数分解）

$$f(x)=\int_0^\infty a(\xi)\cos(\xi x)d\xi+\int_0^\infty b(\xi)\sin(\xi x)d\xi \tag{11.4}$$

を作ることができるということである．ここで，$f(x)$ は区間 $(-\infty,\infty)$ で定義された非周期関数で，$f(x)$ に対して，

$$\begin{aligned} a(\xi)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos(\xi x)dx \\ b(\xi)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin(\xi x)dx \end{aligned} \tag{11.5}$$

と置いている．Fourier 積分表現 (11.4) では関数 $f(x)$ をあらゆる周波数 $0<\xi<\infty$（周期関数のときのように一つの基本周波数の整数倍の周波数だけでなく）に分解しているのが見られる．Fourier 級数のときにやったように，関数 $f(x)$ の周波数成分の大きさを表すものとして**周波数スペクトル**

$$C(\xi)=\sqrt{a^2(\xi)+b^2(\xi)}$$

を定義しよう．関数 $f(x)$ とその周波数スペクトルのいくつかの例を図 11.3 に示す．鋭い角のある関数 $f(x)$ は，鋭い角を表現するのに高周波成分が必要であるため，高い周波数の周波数スペクトルを生じることに注意せよ．他方，単振動関数 $f(x)=\sin(\xi_0 x)$ の周波数スペクトルは，$\xi=\xi_0$ を除く至るところで零である．

さて次に，指数型 Fourier 変換と呼ばれるものを定義することができる．（式 (11.5) は，それぞれ，**Fourier 正弦変換**，**Fourier 余弦変換**と呼ばれている．）Euler（オイラー）の方程式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

を使って少々式の変形を行うと，式 (11.4) を次のように書き変えることができる：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\xi x}dx\right]e^{i\xi x}d\xi \tag{11.6}$$

これは **Fourier 積分表現**と呼ばれている公式である．この公式から Fourier 変換，逆 Fourier 変換という次の変換対が得られる：

(11.7)★

$$\mathcal{F}[f]\equiv F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\xi x}dx \quad \text{(Fourier 変換)}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F]\equiv f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty F(\xi)e^{i\xi x}d\xi \quad \text{(逆 Fourier 変換)}$$

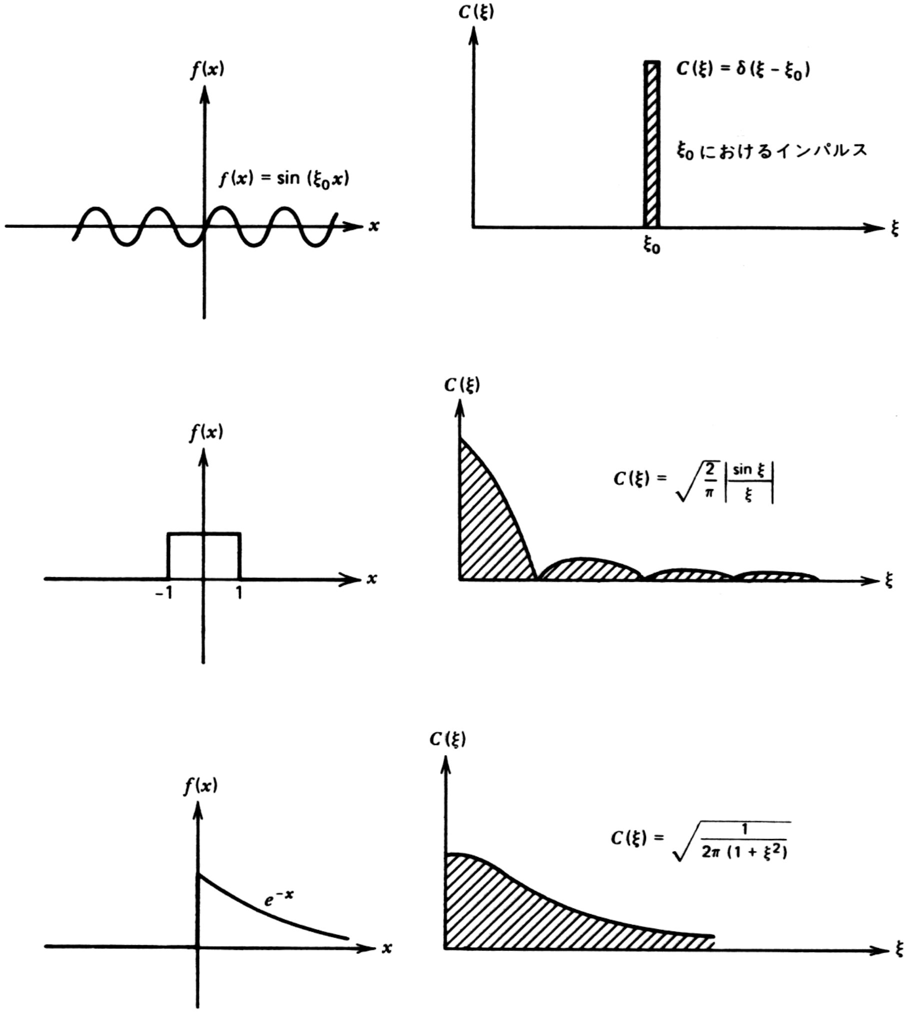


図 11.3　いろいろな関数の周波数スペクトル

次の課で，この変換対の性質およびそれを応用する問題について述べる．

注意

1. $f(x)$ の Fourier 変換 $F(\xi)$ は複素関数となりうる．たとえば，

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\leqslant 0)\\ e^{-x} & (x>0)\end{cases}$$

の Fourier 変換は

$$F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-i\xi}{1+\xi^2}$$

である．

2. Fourier 変換 $F(\xi)$ の絶対値は $f(x)$ の周波数スペクトルである．たとえば，上の注意1の関数 $f(x)$ の周波数スペクトルは

$$|F(\xi)|=\sqrt{\frac{1}{2\pi(1+\xi^2)}}$$

である（読者は複素数の絶対値の求め方は知っているはずである）．

3. 必ずしもすべての関数が Fourier 変換をもつわけではない（積分 (11.7) が存在しないこともある）．実際，$f(x)=c$, $\sin x$, e^x, x^2 などは Fourier 変換をもたない．$|x|\to\infty$ のとき十分早く零に向かう関数だけが変換をもつ．応用の際は，温度関数，波動関数，その他 $|x|\to\infty$ のとき零に向かう物理現象に Fourier 変換を適用する．

練習問題

1. 矩形正弦波

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (-1<x<0)\\ 1 & (0\leqslant x<1)\end{cases}$$

$$f(x+2)=f(x)\quad\text{（周期条件）}$$

の Fourier 級数展開は何か．この級数の始めの 1, 2, 3, 4 項までのグラフを描き，この級数展開の $f(x)$ への収束状況を見よ．また，$f(x)$ の周波数スペクトルのグラフを描け．

2. 鋸波の Fourier 級数展開 (11.3) を項別に微分すると無限級数が得られるが，それが鋸波曲線の導関数を表しているのではないことは明らかである．このことを示せ．

3. 次の周期関数の周波数スペクトルのグラフを描け：
   (a) $f(x)=\sin x$
   (b) $f(x)=\sin x+\cos 2x$
   (c) $f(x)=\sin x+\cos x+0.5\sin 3x$

4. 関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (-1<x<1)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

の Fourier 変換 $F(\xi)$ および周波数スペクトル $C(\xi)=|F(\xi)|$ は何か.

5. 関数 $F(\xi)=1/(1+i\xi)$ の絶対値は $|F(\xi)|=\sqrt{1/(1+\xi^2)}$ であることを示せ.

ヒント　まず分子と分母に $1-i\xi$ を掛けて分母の複素数 i を除け.

6. 区間 $[-L, L]$ での正弦関数と余弦関数の直交性

$$\int_{-L}^{L}\sin(m\pi x/L)\sin(n\pi x/L)dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ L & (m=n)\end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L}\cos(m\pi x/L)\cos(n\pi x/L)dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ L & (m=n)\end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L}\sin(m\pi x/L)\cos(n\pi x/L)dx=0\quad(\text{すべての}m, n=1, 2, 3, \cdots)$$

を証明せよ.

参考書

Tyn Myint-U, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Elsevier, 1973. Fourier 級数と Fourier 変換についてたくさん書いてある章（第 5 章, 第 11 章）のある良書である. 関数が実際に Fourier 級数表現できるかどうか, あるいは Fourier 積分表現できるかどうか, また関数を微分したいときその表現を項別にあるいは積分記号の中で微分できるかどうか, 等々の重要な問題にはたいていこれらの章の中で答えてある.

第12課　Fourier 変換およびその偏微分方程式への応用

目的：　Fourier 変換の有用な性質をいくつか説明し，偏微分方程式を解くときこれらの性質をどう使うことができるかを示すこと，特に，Fourier 変換により微分が積に変えられること，したがって微分方程式が代数方程式に変わることを示す．同時に，無限畳み込みという概念も導入する．

関数 $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ の Fourier 変換は公式

(12.1)★
$$\mathscr{F}[f]=F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx$$

で与えられる．すなわち，x の実軸上で定義された関数 $f(x)$ から出発して，それを式 (12.1) に代入し，新しい関数 $F(\xi)$ $(-\infty<\xi<\infty)$ に到達する．表12.1 に，よく使われる Fourier 変換の例をいくつか挙げてある．その他の変換については本書の付録の表を参照するとよい．変換後の関数 $F(\xi)$ は ξ の複素数値関数であることも実数値関数であることもあるが，このことはこれらの例からもわかる．第1の例では，変換後の関数 $F(\xi)$ は複素数 i を含む．このようなとき，$F(\xi)$ は実変数 ξ（ξ の範囲は $-\infty$ から ∞ まで）の**複素数値関数**であるという．すなわち，変数 ξ は実数であるが関数の値は複素数である．

表 12.1　よく使われる Fourier 変換の例

関数 $f(x)$	Fourier 変換 $F(\xi)$
1. $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & (x\geqq 0)\\ -e^{x} & (x<0)\end{cases}$	$F(\xi)=-i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\xi}{1+\xi^2}$ （複素関数）
2. $f(x)=\begin{cases}1 & (-1<x<1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$	$F(\xi)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin\xi}{\xi}$ （実関数）
3. $f(x)=e^{-x^2}$	$F(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-(\xi/2)^2}$ （実関数）

Fourier 変換が有用であるのは（他のたいていの積分変換についても同様であるが），微分を単なる掛算に変えてしまうという事実による．すなわち，Fourier 変換によって微分方程式は代数方程式に変えられる．Fourier 変換にはその他にも多くの演算上有用な性質がある．それらの中から重要なものをいくつか次に挙げよう．

Fourier 変換の有用な性質

性質 1（Fourier 変換対）

関数 $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ は Fourier 変換

$$\mathcal{F}[f]=F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx$$

によって新しい関数 $F(\xi)$ に変化し，$F(\xi)$ $(-\infty<\xi<\infty)$ は逆 Fourier 変換

$$\mathcal{F}^{-1}[F]=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

によって元の関数 $f(x)$ に戻る．たとえば，

$$e^{-|x|}\xrightarrow{\mathcal{F}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}e^{-|x|}$$

である．図 12.1 を見よ．

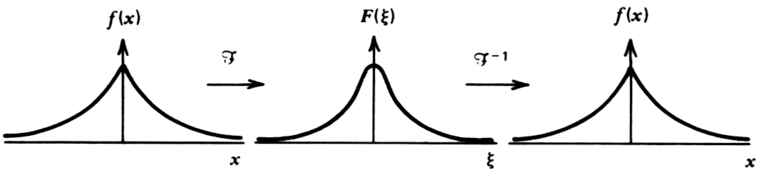


図 12.1　関数とその変換のグラフ

性質 2（変換の線形性）

Fourier 変換は線形変換である．すなわち

$$\mathcal{F}[af+bg]=a\mathcal{F}[f]+b\mathcal{F}[g]$$

このことは容易にわかる．ほんの数分で読者はこの性質の証明ができるであろう．この性質はこれから至るところで何度も何度も繰り返し使われる．たとえば，

$$e^{-x}+3e^{-x^2}$$

の Fourier 変換は

$$\mathcal{F}[e^{-x}]+3\,\mathcal{F}[e^{-x^2}]$$

である.

性質 3（偏導関数の変換）

導関数がどう変換されるかについて論じるときには，いろいろな変数のうちのどれに関する導関数（偏導関数）のことであるかを区別しなければならない．たとえば，もし Fourier 変換の積分式において積分をしている変数が x であって，そして被変換関数が $u(x,t)$ の x に関する偏導関数であるなら，**変換の規則**は

$$\mathcal{F}[u_x]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_x(x,t)e^{-i\xi x}dx=i\xi\mathcal{F}[u]$$

$$\mathcal{F}[u_{xx}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}(x,t)e^{-i\xi x}dx=-\xi^2\mathcal{F}[u]$$

である.

ところで，もし被変換関数が偏導関数 $u_t(x,t)$ であれば（そして変換の積分式において積分をしている変数が x であるなら），変換は

$$\mathcal{F}[u_t]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,t)e^{-i\xi x}dx=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[u]$$

$$\mathcal{F}[u_{tt}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_{tt}(x,t)e^{-i\xi x}dx=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}[u]$$

である.

性質 4（“畳み込み”の性質）

積分変換はすべていわゆる畳み込みの性質をもっている．一般に，二つの関数の積 $f(x)g(x)$ の変換はそれぞれの関数を変換したものの積ではない．すなわち

$$\mathcal{F}[f(x)g(x)]\neq\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$$

である．しかし，積分変換論においては，二つの関数の“畳み込み”という名で呼ばれていて，“積”のような役割を果たすものがある．二つの関数 f,g の“畳み込み”というのは

(12.2)
$$\mathcal{F}[f*g]=\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$$

となるような関数 $f*g$ のことである．それではこの不思議な“畳み込み”$f*g$

とはどんなものであろうか．それは公式

(12.3)
$$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)g(\xi)d\xi$$

で与えられる．(12.2) が成り立つことを示すのはそう困難ではない．この定義から，畳み込み $(f*g)(x)$ というのは，与えられた二つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ から定められる新しい関数であることがわかる．

二つの関数の“畳み込み”の例

二つの関数

$$f(x)=x$$
$$g(x)=e^{-x^2}$$

が与えられたとき，それらの“畳み込み”は

$$\begin{aligned}(f*g)(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\xi)e^{-\xi^2}d\xi\\&=x/\sqrt{2}\quad（\text{新しい関数}）\end{aligned}$$

で与えられる．この際，公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi=\sqrt{\pi}$$

を使用した．

“畳み込み” (12.3) が応用上重要であるのは，偏微分方程式を解くときの最後のステップは，結局のところたいてい二つの変換の積 $\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$ の逆変換を求めることに帰着される，すなわち

(12.4)
$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]\}$$

を求めることに帰着される，という事実があるからである．(12.2) の両辺の逆変換をとると

(12.5)
$$f*g=\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]\}$$

となる．したがって，(12.4) を計算するには，それぞれの因子の逆変換を計算して f と g を求め，それからそれらの“畳み込み”の計算をしさえすればよい．これで偏微分方程式論の重要な問題を解くことができる．

初期値問題の解

初期温度が $u(x,0)=\phi(x)$ である無限棒の中の熱の流れを考えよう．すなわち，Cauchy（コーシー）問題と呼ばれる初期値問題

(12.6)
偏微分方程式 $u_t=\alpha^2 u_{xx}$ $(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$
初期条件 $u(x,0)=\phi(x)$ $(-\infty<x<\infty)$

の解を探そう．この問題を解くには次の三つの基本的なステップを踏む．

〈ステップ 1〉（問題を変換する）

空間変数 x は $-\infty$ から ∞ までの範囲にわたるから，この変数 x に関して偏微分方程式と初期条件の Fourier 変換を作る（変換の積分式において積分をしている変数は x である）．すると

$$\mathcal{F}[u_t]=\alpha^2\mathcal{F}[u_{xx}]$$
$$\mathcal{F}[u(x,0)]=\mathcal{F}[\phi(x)]$$

となるが，Fourier 変換の性質を使って，

(12.7)
$$\frac{dU(t)}{dt}=-\alpha^2\xi^2U(t)$$
$$U(0)=\Phi(\xi)\quad (\Phi \text{ は } \phi \text{ の Fourier 変換})$$

を得る．ただし，$U(t)=\mathcal{F}[u(x,t)]$ である．ここで，関数 U は実際には t と変換された新しい変数 ξ との両方の関数であるが，微分方程式 (12.7) に関する限り ξ は定数であるから，簡単のために，この記号 ξ を省略して単に $U=U(t)$ と記した．

〈ステップ 2〉（変換された問題を解く）

上の微分方程式では新しい変数 ξ は単なる定数に過ぎないということに注意すれば，この問題の解は

(12.8)
$$U(t)=\Phi(\xi)e^{-\alpha^2\xi^2t}$$

である．

〈ステップ 3〉（逆変換を求める）

解 $u(x,t)$ を求めるには

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}[U(\xi,t)]$$
$$=\mathcal{F}^{-1}[\Phi(\xi)e^{-\alpha^2\xi^2t}]$$

を計算しさえすればよい．ここで“畳み込み”の定理 (12.5) が助け舟を出してくれる．その性質を使うと，

(12.9)
$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}[\Phi(\xi)e^{-\alpha^2\xi^2t}]$$
$$=\mathcal{F}^{-1}[\Phi(\xi)]*\mathcal{F}^{-1}[e^{-\alpha^2\xi^2t}]$$
$$=\phi(x)*\left[\frac{1}{\alpha\sqrt{2t}}e^{-x^2/(4\alpha^2t)}\right]\quad \text{（表を使用した）}$$

$$=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)e^{-(x-\xi)^2/(4\alpha^2t)}d\xi$$

と書ける．これですべて終了した．式 (12.9) がわれわれの問題の解である．

しかし，最後にもう一つ，この結果の分析を少ししよう．被積分関数は二つの項

1. 初期温度 $\phi(x)$
2. 関数 $G(x,t)=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}}e^{-(x-\xi)^2/(4\alpha^2t)}$ (**Green**（グリーン）**関数**あるいは**インパルス応答関数**と呼ばれる)

からできている．このインパルス応答関数 $G(x,t)$ は $x=\xi$ における初期温度インパルスに対する温度応答であることを示すことができる．つまり，$G(x,t)$ は初期時点で $x=\xi$ に存在した単位熱インパルスに由来する時刻 t における棒の温度分布である（図 12.2）．

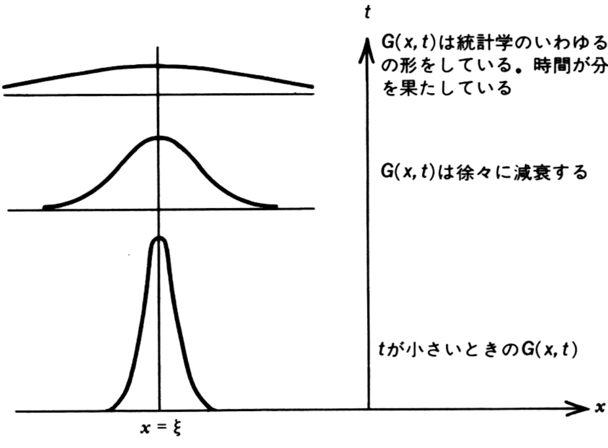


図 12.2　$x=\xi$ における温度インパルスに対するインパルス応答 $G(x,t)$

したがって解 (12.9) は次のように解釈される：初期温度 $u(x,0)=\phi(x)$ を（各点 $x=\xi$ で）大きさ $\phi(\xi)$ の連続インパルスに分解し，その各インパルスに対応する温度 $\phi(\xi)G(x,t)$ を求め，これらの温度を加え合わせる（積分する）ことによって，解 (12.9) が得られる．後でわかるように，このような考え方は広い適用範囲をもつもので，**重ね合わせ**と呼ばれている．

実用的な観点からすると，(12.9) の形の解は特別な初期温度 $\phi(x)$ に対して積分ができてしまうことが多い．この積分が解析的に実行できないときで

も，積分を数値的に実行することにより各点での解を求めることはできる．

注意

Fourier 変換の主な欠点は，変換できない関数も多いということである．たとえば，

$$f(x)=\text{定数}$$
$$f(x)=e^x$$
$$f(x)=\sin x$$

のような簡単な関数でさえ，積分

$$\mathcal{F}[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

が存在しないために変換できない．$|x|\to\infty$ のとき十分速く零に減衰する関数しか変換できない．また，$0<t<\infty$ であるから，上のような初期値問題において時間変数を変換するのに Fourier 変換を使おうとしても駄目である．

練習問題

1.

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\leqq 0)\\ e^{-x} & (0<x)\end{cases}$$

の Fourier 変換を求めよ．付録の表を使って答えを確かめよ．

2. Fourier 変換と逆 Fourier 変換が線形変換であることを証明せよ．

3. 初期値問題

偏微分方程式　$u_t=\alpha^2 u_{xx}\quad(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件　　　$u(x,0)=e^{-x^2}\quad(-\infty<x<\infty)$

を Fourier 変換を使って解け．

4. 性質

$$\mathcal{F}[u_x]=i\xi\mathcal{F}[u]$$
$$\mathcal{F}[u_{xx}]=-\xi^2\mathcal{F}[u]$$

を証明せよ．

ヒント　部分積分を使え．

5. 二つの関数 f と g の畳み込みは

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi$$

あるいは

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)g(x-\xi)d\xi$$

と書けることを証明せよ.

参考書

H. Davis, *Fourier Series and Orthogonal Functions*, Allyn and Bacon, 1963. Fourier 級数と Fourier 変換の直観的な見方も厳密な見方も与えてくれる優れた本である.

第13課　Laplace 変換

目的：　重要な変換対

$$\mathcal{L}[f]=F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad \text{(Laplace 変換)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F]=f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{st}ds \quad \text{(逆 Laplace 変換)}$$

を導入し，それが有用な性質をもっていることを示すこと．Laplace（ラプラス）変換は減衰因子 e^{-st} を含んでいるため，より多くの関数が Laplace 変換可能となるので，Fourier 変換より便利である．この変換は $[0,\infty)$ で定義された関数に作用するから，時間変数 t に適用するのが普通である．

Laplace 変換の有用な性質をいくつか述べた後で，偏微分方程式論における重要な問題を解くことにしよう．

この本で学ぶすべての積分変換の中で，読者が以前見たことがあるのは恐らく Laplace 変換

(13.1)
$$\mathcal{L}[f]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

だけではないであろうか．Laplace 変換は常微分方程式の初期値問題を代数方程式に変換するための非常に強力な道具であるから読者に馴染があるに違いない．Laplace 変換は常微分方程式を代数方程式に変換するのに役立つばかりでなく，偏微分方程式を常微分方程式に変換するのにも使用できる．Laplace 変換は，特に，0から ∞ の範囲にわたる任意の変数 $x, y, z, t, \cdots$ に適用するものである（時間 t に適用するのが普通であるが）．Laplace 変換を常微分方程式に適用するのと偏微分方程式に適用するのとの主たる差異は，偏微分方程式の場合は，変換で新しく得られる方程式が独立変数の一つ減った新しい偏微分方程式になるかあるいはまた1変数の常微分方程式になるかということであると

いう点である．次に，われわれはこの新しい問題をどうやって解くかを決めなければならない（他の変換によるとか，変数分離によるとかして）．興味ある問題を実際に解く例を示す前に，この変換の有用な性質をいくつか列挙しよう．

Laplace 変換の性質

性質 1（変換対）

Laplace 変換とその逆変換は

(13.2)
$$\mathcal{L}[f]=F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad \text{(Laplace 変換)}$$
$$\mathcal{L}^{-1}[F]=f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds \quad \text{(逆 Laplace 変換)}$$

によって与えられる．Fourier 変換に比べて Laplace 変換がもっている長所の一つは，被積分関数に減衰因子 e^{-st} があるために Fourier 変換より多くの関数の変換が可能であるということである（Fourier 変換の核 $e^{-i\xi x}$ は絶対値が 1 だから減衰がない）．実際，関数 $f(t)$ が Laplace 変換をもつことを保証する正確な条件は次の定理によって与えられる．

Laplace 変換の存在を保証する十分条件

1. 任意の正の数 A に対して f が区間 $0\leqslant t\leqslant A$ で区分的に連続である．
2. ある数 T より大きな t のすべての値に対して $|f(t)|\leqslant Me^{at}$ となるような定数 M と a を見いだすことができる．

上記 2 条件が成立するとき，$s>a$ に対して

$$\text{Laplace 変換}\quad \mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

が存在する．

Laplace 変換をもつ二三の関数とそのグラフを次に挙げる．

1. $f(t)=1 \quad (0<t<\infty) \qquad F(s)=\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{1}{s}$

   $(M=1,\ a=0)$　　（図 13.1 a を見よ）

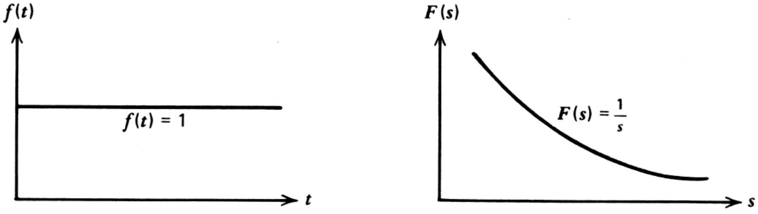


図 13.1 a

2. $f(t)=e^{2t}\quad(0<t<\infty)\qquad F(s)=\dfrac{1}{s-2}\quad(s>2)$

$(M=1,\ a=2)$　　(図 13.1 b を見よ)

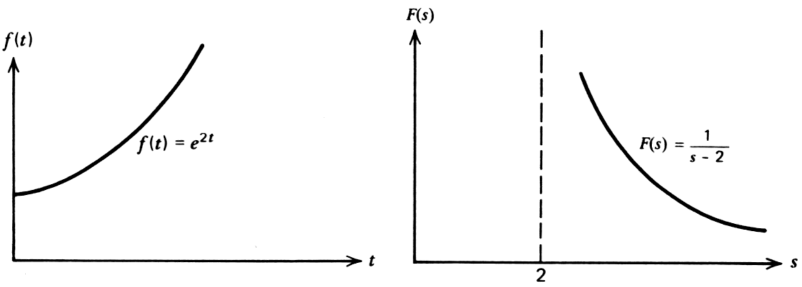


図 13.1 b

3. $f(t)=\sin(\omega t)\qquad F(s)=\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$

$(M=1,\ a=0)$　　(図 13.1 c を見よ)

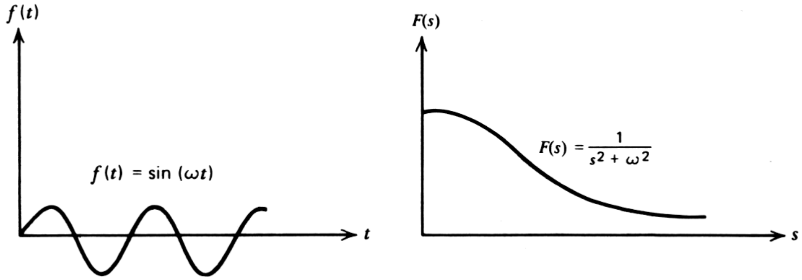


図 13.1c
図 13.1a〜13.1c Laplace 変換対のグラフ

4. $f(t)=e^{t^2}$ (Laplace 変換をもたない)

Laplace 変換の定義では，変数 s は実変数である ($0<s<\infty$)．しかし，この定義を複素値の s にまで拡張することが可能である（むしろ望ましいことが多い）．実際，逆 Laplace 変換

$$\mathcal{L}^{-1}[F]=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{st}ds$$

を計算するときにはそうしておくのが望ましい．複素平面での周回積分や留数の理論を使わなければならないこともしばしばある．しかし，ここではこのような話を気にしないで，逆変換を求めるには付録の表を使うことにしよう．

性質 2（偏導関数の変換）

2変数の関数 $u(x,t)$ の種々の偏導関数 $u_t, u_{tt}, u_x, u_{xx}, \cdots$ の変換を考える．Laplace 変換は変数 t（積分変数）を変換するから，偏導関数の変換の規則は，$U(x,s)=\mathcal{L}[u(x,t)]$ とすれば

$$\mathcal{L}[u_t]=\int_0^\infty u_t(x,t)e^{-st}dt=sU(x,s)-u(x,0)$$

$$\mathcal{L}[u_{tt}]=\int_0^\infty u_{tt}(x,t)e^{-st}dt=s^2U(x,s)-su(x,0)-u_t(x,0)$$

$$\mathcal{L}[u_x]=\int_0^\infty u_x(x,t)e^{-st}dt=\frac{\partial}{\partial x}U(x,s)$$

$$\mathcal{L}[u_{xx}]=\int_0^\infty u_{xx}(x,t)e^{-st}dt=\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s)$$

である．u_x や u_{xx} の変換規則は微積分の基本的な規則

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dy=\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)dy$$

から得られる．一方，u_t や u_{tt} の変換規則は部分積分の公式を使って証明できる．

性質 3（“畳み込み”の性質）

Laplace 変換における“畳み込み”の役割は Fourier 変換の場合とほぼ同じであるが，その定義は少しばかり異なる．

有限“畳み込み”の定義

二つの関数 f と g の**有限“畳み込み”**を次のように定義する：

(13.3)
$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

（これら二つの積分は同じである）．別のいい方をすれば，無限“畳み込み”では $-\infty$ から ∞ までの積分をしたが，有限“畳み込み”では0から t までの積分をする．一例として，二つの関数

$$f(t)=t$$
$$g(t)=t$$

の有限“畳み込み”は

$$(f*g)(t)=\int_0^t \tau(t-\tau)d\tau=\frac{t^3}{6}$$

である．Fourier 変換における無限“畳み込み”の場合と同様，この新しい“畳み込み”の重要な性質として

(13.4)
$$\mathcal{L}[f*g]=\mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$$

あるいは同じことだが，

(13.5)
$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]\}=f*g$$

がある．この性質によれば，二つの関数の積（$\mathcal{L}[f]$，$\mathcal{L}[g]$ のことと解釈する）の逆 Laplace 変換は，それぞれの因子 $\mathcal{L}[f]$，$\mathcal{L}[g]$ の逆変換をして f と g を求めた後それらの“畳み込み”を計算することにより求めることができる．たとえば

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right]=\int_0^t \sin\tau d\tau=1-\cos t$$

$$F(s)=\frac{1}{s}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)=1 \qquad G(s)=\frac{1}{s^2+1}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} g(t)=\sin t$$

である．さてこれで重要な初期値・境界値問題と取り組む準備が整った．

半無限媒質中の熱伝導

側面を絶縁した大きな（深い）液体の容器を考えよう．液体の初期温度は u_0，液体の上の空気の温度は零（ある基準温度）であると仮定しよう．われわれの目標はいろいろな時刻における容器のいろいろな深さの液体の温度を定めることである．それには，問題

(13.6)

偏微分方程式	$u_t=u_{xx}$	$(0<x<\infty,\ 0<t<\infty)$
境界条件	$u_x(0,t)-u(0,t)=0$	$(0<t<\infty)$
初期条件	$u(x,0)=u_0$	$(0\leqslant x<\infty)$

を解かなければならない．図 13.2 を見よ．

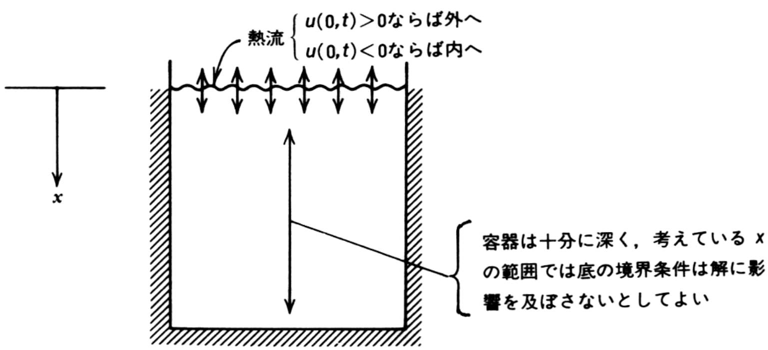


図 13.2　いま考えている熱流問題の説明図

この問題を解くには時間変数 t を Laplace 変換により変換する（x も 0 から ∞ までの範囲にわたるから，Laplace 変換により x を変換することももちろんできる）．われわれの問題を変換すると，x についての次の常微分方程式が得られる：

$$\text{(13.7)}\quad \begin{array}{ll} \text{常微分方程式} & sU(x)-u_0=\dfrac{d^2}{dx^2}U(x) \quad (0<x<\infty) \\ \text{境界条件} & \dfrac{d}{dx}U(0)=U(0) \end{array}$$

(偏微分方程式と境界条件を変換し初期条件は変換しない). これは $x=0$ における境界条件を伴った2階常微分方程式である (物理的理由から, 実際には, "$x\to\infty$ のとき $U(x)$ が有界" というもう一つの暗黙の境界条件がある). (13.7) の微分方程式は x にしか関係しないから, $U(x,s)$ の中の記号 s を省略して, より簡単な記法 $U(x)$ を用いたことに注意せよ.

(13.7) を解くために, まず一般解 (同次解 + 一つの特殊解) を求める:

$$U(x)=c_1e^{\sqrt{s}\,x}+c_2e^{-\sqrt{s}\,x}+\frac{u_0}{s}$$

この式を (13.7) の境界条件に代入すると定数 c_1 と c_2 が求まる (まず $c_1=0$ に注意せよ. そうでないと x が大きくなるにつれて温度が無限大になってしまう). $x=0$ における境界条件から c_2 を求めると, $U(x)$ の答は

$$\text{(13.8)}\qquad U(x)=u_0\left\{\frac{-e^{-\sqrt{s}\,x}}{s(\sqrt{s}+1)}+\frac{1}{s}\right\}$$

となる. さて最後のステップにかかろう. 温度 $u(x,t)$ を求めるため

$$u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}[U(x,s)]$$

を計算する (ここで変数 s を復活させて $U(x,s)$ と書いた). この逆変換を求めるには, 付録の逆 Laplace 変換の表の助けを借りなければならない. それによると

$$\text{(13.9)}\quad u(x,t)=u_0+u_0[-\operatorname{erfc}(x/(2\sqrt{t}))+\operatorname{erfc}(\sqrt{t}+x/(2\sqrt{t}))e^{(x+t)}]$$

である. ここで

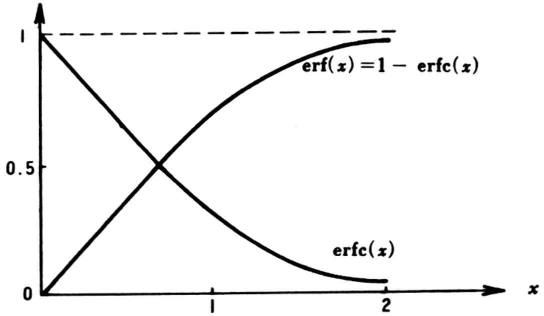


図 13.3　誤差関数 [erf] と余誤差関数 [erfc] のグラフ

$$\mathrm{erfc}\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi$$

は余誤差関数であり，そのグラフは図 13.3 で与えられる．

少し時間をかけて上の式を解析し，プロッターのついた計算機でグラフを描くと，解が図 13.4 のような形になることがわかるであろう．

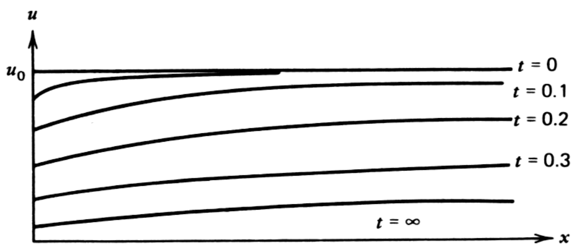


図 13.4　いろいろな時刻における無限媒質中の温度

注意

1. Laplace 変換は，非同次偏微分方程式の問題にも適用できる（変数分離法は同次のものにしか適用できなかった）が，一般には，定数係数の方程式の場合にしかうまくいかない（変数分離法は変数係数でもうまくいくことがある）．この二つの方法が取り扱う問題の型を次表にまとめてある．

表 13.1　Laplace 変換法と変数分離法の比較

	方法	
	Laplace 変換	変数分離
非同次偏微分方程式	可	否
非同次境界条件	可	否
変数係数	否	可
非線形方程式	否	否

2. Hankel（ハンケル）変換や Mellin（メラン）変換も初期値・境界値問題や境界値問題を解くのに使えるが，Laplace 変換とは次の一つの点に関して異なっている．Laplace 変換は

$$\mathcal{L}[y']=s\mathcal{L}[y]-y(0)$$

という公式により導関数（すなわち，ある変数に関する微分演算）を積演

算に変える．他方，Hankel 変換や Mellin 変換は微分演算子（すなわち，微分を含んだある複雑な線形演算）を積に変える．たとえば，Hankel 変換

$$H[y]=\int_0^{\infty} rJ_0(\xi r)y(r)dr$$

は

$$H\left[y''(r)+\frac{1}{r}y'(r)\right]=-\xi^2 H[y]$$

のような微分演算子 $\left(\text{“}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\text{”}\ \text{という演算}\right)$ を変換する．そこで，Hankel 変換で変数係数の特殊な微分方程式（たとえば Bessel(ベッセル) の方程式）を解くことができる．

3. Laplace 変換（t を変換する）は xt 平面を x 軸上に射影すると解釈することもできる．また，元の境界条件，偏微分方程式，初期条件は，新しい微分方程式と境界条件に変換される．次の図を見よ．

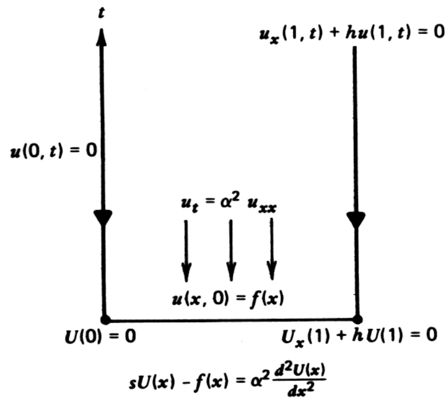


図 13.5

練習問題

1. 偏導関数 u_t の変換公式

$$\mathcal{L}[u_t(x,t)]=sU(x,s)-u(x,0)$$

を証明せよ．

2. 次の初期値問題を Laplace 変換によって解け．

偏微分方程式　$u_t=\alpha^2 u_{xx}$　$(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=\sin x \quad (-\infty<x<\infty)$

3. 問題

偏微分方程式　$u_t=u_{xx} \quad (0<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$u(0,t)=\sin t \quad (0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=0 \quad (0\leqslant x<\infty)$

を Laplace 変換（t を変換する）によって解け．この問題はどのような物理的解釈がされるか．

4. 境界値問題

常微分方程式　$\dfrac{d^2U}{dx^2}-sU=A \quad (0<x<1)$

境界条件
$$\begin{cases} \dfrac{dU(0)}{dx}=0 \\ U(1)=0 \end{cases}$$

を解け．

参考書

1. H. Weinberger, *A First Course in PDE*, Ginn and Co., 1965. この本には，逆 Laplace 変換を計算するときの道具となる周回積分に関することがよく書いてある節がある．
2. 常微分方程式の初心者向き教科書には，ほとんどすべて，Laplace 変換に関する章がある．

第 14 課　Duhamel の原理

目的：　Laplace 変換によって微分方程式の解に内在する興味ある現象が発見されるということ，特に，偏微分方程式の解の Laplace 変換を代数的に扱うことによって Duhamel（デュアメル）の原理として知られる興味ある見方が発見されるということを示すこと．この原理は常微分方程式を使っても説明されるが，ここでは，ある具体的な初期値・境界値問題を例にしてその意味を説明しよう．

Laplace 変換は，偏微分方程式を解く強力な道具でもあるが，それと同時に物理的な問題の解の性質を洞察する力も与えてくれる．この課では，Laplace 変換の助けを借りて，Duhamel の原理という非常に重要で面白い概念を説明する．しかし，この原理の話に入る前に，工学で頻繁に生じる問題の話をしよう．

境界の温度が与えられている棒の内部の熱の流れ

時間と共に変化する境界条件のもとでの媒質内部の温度を定めることが大切であるような場合が非常に多い．たとえば，側面が熱的に絶縁された棒で右端での温度 $f(t)$ が与えられているようなものを考えよう：

$$\text{偏微分方程式}\quad u_t = u_{xx} \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$$

$$\text{(14.1)}\qquad \text{境界条件}\quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=f(t) \end{cases} \quad (0<t<\infty)$$

$$\text{初期条件}\quad u(x,0)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

図 14.1 を見よ．

もっと簡単な形の問題，すなわち，境界の温度が一定の問題



図 14.1 時間とともに変化する境界条件

(14.2)

偏微分方程式　$w_t = w_{xx}$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} w(0,t)=0 \\ w(1,t)=1 \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$w(x,0)=0$　$(0\leqq x\leqq 1)$

の解がわかれば問題 (14.1) の解も容易に求められると思うかもしれない．実際，問題 (14.1) と (14.2) の両者を両側に並べて Laplace 変換で解くと，(14.2) の解を使って (14.1) の解が表せるという驚くべき結果 (Duhamel の原理) に気が付くであろう．

そこで，(14.1) と (14.2) を並べて解いてみると次のようになる．

易しい問題 (14.2)
(境界条件が定数)

(14.2) を Laplace 変換する

↓

$$\frac{d^2W}{dx^2} - sW(x) = 0$$
$$W(0)=0$$
$$W(1)=\frac{1}{s}$$

常微分方程式を解く

↓

$$W(x,s) = \frac{1}{s}\,\frac{\sinh(x\sqrt{s})}{\sinh\sqrt{s}}$$

逆変換を求める

↓

$$w(x,t) = x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-(n\pi)^2 t}\sin(n\pi x)$$

(境界条件が定数の問題に対する解)

難しい問題 (14.1)
(時間と共に変化する境界条件)

(14.1) を Laplace 変換する

↓

$$\frac{d^2U}{dx^2} - sU(x) = 0$$
$$U(0)=0$$
$$U(1)=F(s)$$

常微分方程式を解く

↓

$$U(x,s) = F(s)\,\frac{\sinh(x\sqrt{s})}{\sinh\sqrt{s}}$$

まだ逆変換しない——まず s を掛けて s で割っておく

↓

$$U(x,s) = F(s)\left\{s\left[\frac{\sinh(x\sqrt{s})}{s\sinh\sqrt{s}}\right]\right\}$$

易しい問題 (14.2)
(境界条件が定数)(続)

難しい問題 (14.1)
(時間と共に変化する境界条件)(続)

$\mathcal{L}[w_t]=sW-w(x,0)$ という関係式を使って

↓

$$U(x,s)=F(s)\mathcal{L}[w_t]$$

ゆえに

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\mathcal{L}[w_t]\}\\&=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]*\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}[w_t]\\&=f(t)*w_t(t)\\&=\int_0^t f(\tau)w_t(x,t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

(部分積分により)

$$\begin{aligned}&=\int_0^t w(x,t-\tau)f'(\tau)d\tau\\&\quad+f(0)w(x,t)\end{aligned}$$

(時間と共に変化する境界条件の問題の解を，境界条件が定数の問題の解を使って表したもの)

つまり，時間と共に変化する境界条件の問題の解 $u(x,t)$ をより易しい問題(境界条件が定数)の解を使って次のように表すことができた：

$$u(x,t)=\int_0^t w_t(x,t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{14.3}$$
$$=\int_0^t w(x,t-\tau)f'(\tau)d\tau+f(0)w(x,t)$$

式 (14.3) は **Duhamel(デュアメル)の原理**と呼ばれている．ところで，境界条件が定数の問題の解 $w(x,t)$ は

$$w(x,t)=x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-(n\pi)^2t}\sin(n\pi x)$$

であるから，これを式 (14.3) に代入して，時間と共に変化する問題の解が得られる．($w(x,t)$ の無限級数表現を項別に(t に関して)微分すると発散級数になる ($t=0$ で) から，(14.3) の2番目の式を使わなければいけない．)

Duhamel の公式を有用なものにしているもう一つの側面がある．

Duhamel の原理の重要性

今述べた問題では，境界条件が定数の易しい問題を解くことができたので，

Duhamel の公式 (14.3) を使って時間と共に変化する境界条件の解を求めることができた．しかし，易しい問題（定数の境界条件）さえも解析的に解けない場合もしばしばある．解を実験によって観察することならできる．いいかえれば，定数の境界条件をもつような装置を用意してその応答を実験によって観察することならできる．それから Duhamel の原理を使い，時間と共に変化する任意の境界条件の解を求めるのである．実際には，境界条件が定数の問題に対する応答 $w(x,t)$ を1度だけ観察しさえすればよい．このデータが得られたら，Duhamel の公式 (14.3) に代入して任意の境界条件 $f(t)$ の問題を解くことができる．

注意

Duhamel の原理には次のような興味ある変種がある．それは，問題

$$\text{(14.4)}\qquad \begin{aligned} &\text{偏微分方程式}\quad u_t=u_{xx}\quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)\\ &\text{境界条件}\quad \begin{cases} u(0,t)=0\\ u(1,t)=f(t)\end{cases}\quad (0<t<\infty)\\ &\text{初期条件}\quad u(x,0)=0\quad (0\leqslant x\leqslant 1)\end{aligned}$$

の解を別の形の簡単な問題

$$\text{(14.5)}\qquad \begin{aligned} &\text{偏微分方程式}\quad w_t=w_{xx}\quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)\\ &\text{境界条件}\quad \begin{cases} w(0,t)=0\\ w(1,t)=\delta(t)\end{cases}\quad (t=0\ \text{における温度インパルス})\\ &\text{初期条件}\quad w(x,0)=0\quad (0\leqslant x\leqslant 1)\end{aligned}$$

の解 $w(x,t)$ を使って表すものである．その公式，すなわち

$$u(x,t)=\int_0^t w(x,t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{14.6}$$

を知っていれば，温度インパルスに対する応答温度 $w(x,t)$ を決める実験を行うことにより，任意の境界温度 $f(t)$ に対する応答温度 $u(x,t)$ を求めることができる．

練習問題

1. 問題 (14.4) と (14.5) のそれぞれの Laplace 変換をし，この課で (14.3) を求めたときの論法と同じ論法を使って，Duhamel の原理 (14.6) を証明せよ．

ヒント　インパルス関数 $\delta(t)$ の Laplace 変換は $\mathcal{L}[\delta(t)]=1$ である．

2.

$$w(x,t)=x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-(n\pi)^2t}\sin(n\pi x)$$

の偏導関数 w_t は，この級数を項別に微分すると（$t=0$ において）ほとんどすべての x に対して発散することを示せ.

3. （側面が絶縁されている）金属棒があるとして，その右側の端に初期熱インパルスを与える（左側の端の温度は零に固定する）と仮定しよう．棒の初期温度は零（ある基準温度）であるとする．中点 $x=0.5$ における温度をいろいろな時刻に測定して次のような表が得られたとしよう：

時刻	中点の温度
t_1	w_1
$t_2=2t_1$	w_2
$t_3=3t_1$	w_3
⋮	⋮
$t_n=nt_1$	w_n

このデータを使って，境界条件が

（a）　$u(1,t)=\sin t$

（b）　$u(1,t)=f(t)$　（任意の $f(t)$）

のときの点 $u(0.5,t_n)$ における応答温度を近似したい．どのようにすればよいか.

4. Duhamel の原理を使って，初期値・境界値問題

偏微分方程式　$u_t=\alpha^2u_{xx}$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases}u(0,t)=0\\u(1,t)=\sin t\end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=0$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$

の解を求めよ.

参考書

1. C. Wylie, *Differential Equations*, McGraw-Hill, 1979.　この本の第6章では Duhamel の原理を常微分方程式の問題と関連させて論じている.
2. A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, MacMillan, 1963. あらゆる種類の応用上の問題がたくさん盛られている優れた本である．Duhamel の原理は261頁で論じられている.

第 15 課　拡散問題における対流項 u_x

目的：　拡散方程式

$$u_t = Du_{xx} - Vu_x$$

拡散項 ↗　　↖ 対流項

における項 u_x が対流という現象（流れによって熱などが運ばれる現象）をどう表しているかを示すこと．この対流・拡散方程式が記述する現象は拡散と対流の両方の性質を示し，いろいろな状況の中でよく出会う現象である．どのくらいの拡散とどのくらの対流が起きるかは，二つの係数 D と V の相対的大きさによる．

対流は物質が媒質と共に動くことを表すものであるから，媒質と共に動く移動座標系をとることができる．こうすると，対流項が消去され，方程式を移動座標系を使って解き，それから元の変数 x に戻すことができる．

これまでは 1 次元の領域で熱の流れ（あるいは拡散のようなもの）を取り扱って来た．今度は地表から上空へ向けてある物質の濃度を求める問題を考えることにしよう．ここで，物質は大気を通して拡散すると同時に，（速度 V で動く）上昇気流によって上方へ運ばれる（対流する）ものとする．明らかに，拡散よりも対流の方が物質にたくさんの動きを起こすことができる．（しかし，それは拡散係数と大気の速度との相対的大きさによる．）**拡散**は物質が大気に混ざることであるが，**対流**は大気によって（すなわち媒質が動くことによって）物質が動かされることである．ともかく，ここでの目的は拡散・対流方程式

★
$$u_t = Du_{xx} - Vu_x$$

を解くこと，そして，この方程式がどのようにして導き出されるかを示すこと

である．

物質の濃度 $u(x,t)$ がこの方程式を満たすことを示すには次の二つの基本的な事実を使えばよい．

1. 対流による流束

   対流により（左から右へ）ある点をよぎる物質の流束は $Vu(x,t)$ で与えられる．ここで V は媒質の速度（m/s），$u(x,t)$ は物質の線濃度（kg/m）である（図 15.1）．

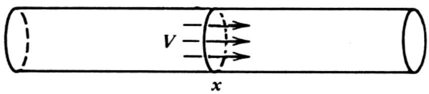


図 15.1 対流により x をよぎる物質の量（毎秒）は $Vu(x,t)$ である．

2. 拡散による流束

   拡散により（左から右へ）点 x をよぎる物質の流束は $-Du_x(x,t)$ で与えられる．ここで D は拡散係数である．

これら二つの式を第3課で学んだ保存方程式に代入すると，基本偏微分方程式が

$$\bigstar \qquad u_t = Du_{xx} - Vu_x$$

であることが証明できる．解がどんな形をしているか，対流項が式に入っているとき解がどのような挙動を示すか，等々についての感じをつかむため，まず純対流問題（拡散項が零）を調べよう．典型的な問題としては，きれいな川（速度 V で水が流れている）にある物質を捨てたときの下流でのその物質の濃度を観察する問題が考えられる．たとえば，その物質を捨てた場所から下流の方向への距離を x とすると，流れる水の中でその物質が拡散しないなら，物質の濃度 $u(x,t)$ は次のような数学モデルを解くことによって求めることができる：

$$
\begin{array}{llll}
 & \text{偏微分方程式} & u_t = -Vu_x & (0<x<\infty,\ 0<t<\infty) \\
(15.1) & \text{境界条件} & u(0,t) = P \longleftarrow & \text{物質を一定の割合で投入し続ける} \\
 & \text{初期条件} & u(x,0) = 0 \longleftarrow & \text{最初は川はきれいである}
\end{array}
$$

図 15.2 はこの問題の概念図である．

この問題を解く前に，解がどんなものであるべきかについて少し考えてみる必要がある．明らかに，汚染物質（川の中の物質）は最初は零であるが，$x=0$

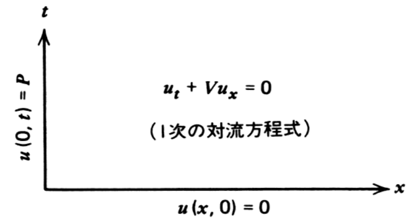


図 15.2　純対流の問題

において一定の割合で投入され始めると，速度 V で下流の方へ流されて行くはずである．こうなっているかどうかを数学的に見るために，(15.1) を解いてみよう．境界条件も偏微分方程式も線形であるから，変数分離とか積分変換とかを使って考えるべきである．しかし，変数 x は有界ではないから，変数分離は具合が悪い．そこで，t に Laplace 変換を施してみよう．

対流問題の Laplace 変換による解

対流問題 (15.1) は Laplace 変換

$$U(x) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-st} dt$$

を使うと

$$sU(x) = -V\frac{dU}{dx} \quad (0 < x < \infty)$$

$$U(0) = \frac{P}{s}$$

という方程式に置き変えることができる．これは非常に簡単な初期値問題であるから，すぐ解くことができて，

$$U(x) = \frac{P}{s} e^{-sx/V}$$

が得られる．逆 Laplace 変換の表を調べると，$H(\xi)$ を Heaviside (ヘヴィサイド) 関数 (階段関数)

$$H(\xi) = \begin{cases} 0 & (\xi < 0) \\ 1 & (\xi \geqslant 0) \end{cases}$$

として，

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[U] = PH(t - x/V)$$

であることがわかる．ゆえに，われわれの問題の解は

$$u(x,t)=\begin{cases}0 & (t<x/V)\\ P & (t\geqq x/V)\end{cases}$$

である．

この解はとても簡単な解である．確かに，ベルトコンベアの上に何かを落としたとき，それが動いて行くのを見ているのと同じようなものである．しかし，溶質（汚染物質）が媒質の中で拡散するときには，もっと面白い問題となる．

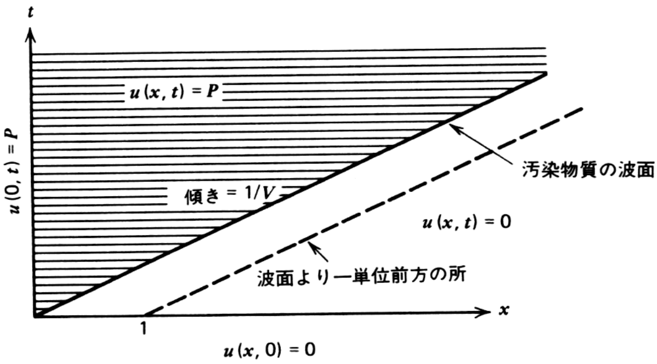


図 15.3 純対流波

物質が動きながら拡散するとき何が起きるかを見るため，次の問題を解いてみる：

(15.2)

偏微分方程式 $u_t=Du_{xx}-Vu_x \quad (-\infty<x<\infty)$

初期条件 $u(x,0)=1-H(x) \quad (-\infty<x<\infty)$

ここで，例によって，$H(x)$ は Heaviside 関数である．初期濃度を図 15.4 に示す．

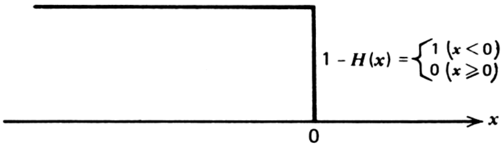


図 15.4 拡散・対流方程式の初期条件

新しい問題 (15.2) では一方の境界を $-\infty$ にまで動かしてしまった（つまり，境界なしの初期値問題にしてしまった）が，そうすることによって，DとVとの相対的な効果を評価する問題がはっきりとわかるようになるはずである（境界を $-\infty$ にまで移すというのは単なる技術上の工夫である）．(15.2) を解くには，t に関する Laplace 変換をしても x に関する Fourier 変換をしてもよいのであるが，この場合には，非常に面白いもう一つの方法がある．すなわち，濃度 $u(x,t)$ を x の関数として測る代りに，速度 V で x 軸に沿って動く新しい座標 ξ を導入する．いいかえれば，川岸に沿って座標系を置く代りに，波面と共に動く座標系を設けるわけである（もちろん，今考えている問題では，対流の他に拡散があるので，はっきりとした鋭い波面があるわけではない）．数学的にいうと，空間座標 x を $\xi=x-Vt$ に変えるということになる．明らかに，

$\xi=0$ のときは　波面のところにいる

$\xi=1$ のときは　波面より1単位前方にいる

$\xi=-1$ のときは　波面より1単位後方にいる

である．つまり，われわれが今やろうとしていることは，初期値問題

偏微分方程式　$u_t=Du_{xx}-Vu_x \quad (-\infty<x<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=1-H(x) \quad (-\infty<x<\infty)$

をその動く座標系に関する新しい問題に変換し，そしてそれを解き，それからまた元の座標 (x,t) に変換し直して解を求めることである．まず初めに，いわゆる変数変換（独立変数の変換）をする．旧い座標 (x,t) の代りに新しい座標 (ξ,τ)

$$\xi=x-Vt$$
$$\tau=t$$

を導入する．τ は t と同じものであるが，新しい名前にしておいた方が間違いが少ない．偏微分方程式を (ξ,τ) に関するものに書き直すには，合成関数の微分の規則を使う：

$$u_t=u_\xi\xi_t+u_\tau\tau_t=-Vu_\xi+u_\tau$$
$$u_x=u_\xi\xi_x=u_\xi$$
$$u_{xx}=(u_\xi)_x=u_{\xi\xi}\xi_x=u_{\xi\xi}$$

図 15.5 のような関数関係の図式を使うと，合成関数の微分の規則がどのように適用されているかがはっきりするであろう．

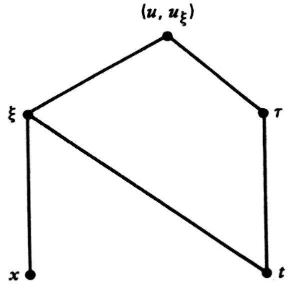


図 15.5 変数の間の関数関係を示す図式

図 15.5 の図式は，u および u_ξ の x と t に関する偏微分を計算するのに役に立つ．なぜならば，u と u_ξ は，一般に，ξ と τ に依存し，ξ は x と t の両方に依存するということをこの図式が正確に示しているからである．（他方，変数 τ は t にしか依存していない．）

変換についてはここまでにして次に進もう．上式の u_t, u_x, u_{xx} を偏微分方程式に代入すると

$$-Vu_\xi + u_\tau = Du_{\xi\xi} - Vu_\xi$$

すなわち

$$u_\tau = Du_{\xi\xi}$$

が得られる．したがって，ξ と τ を独立変数とする新しい初期値問題は

偏微分方程式 $u_\tau = Du_{\xi\xi} \quad (-\infty < \xi < \infty)$

初期条件 $u(\xi, 0) = 1 - H(\xi) \quad (-\infty < \xi < \infty)$

である．（$t=0$ のとき $\xi = x$ であるから初期条件は両方共同じであることに注意せよ．）この問題は第 12 課で Fourier 変換を用いてすでに解いてある．その解は

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{D\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\beta) e^{-(\xi-\beta)^2/(4D\tau)} d\beta$$

であった．ここで $\phi(\beta)$ は初期条件である．ゆえに，今の場合，

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{D\pi\tau}} \int_{-\infty}^{0} e^{-(\xi-\beta)^2/(4D\tau)} d\beta$$

が得られる．

$$\bar{\beta} = \frac{\xi - \beta}{2\sqrt{D\tau}}, \qquad d\bar{\beta} = \frac{-1}{2\sqrt{D\tau}} d\beta$$

と置くことにより，

$$u(\xi,\tau)=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\xi/2\sqrt{D\tau}}^{\infty}e^{-\bar{\beta}^2}d\bar{\beta}\right] \tag{15.3}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\dfrac{-\xi}{2\sqrt{D\tau}}\right)\right] & (\xi<0)\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\dfrac{\xi}{2\sqrt{D\tau}}\right) & (0\leqslant\xi)\end{cases}$$

という興味ある結果が得られる．図 15.6 には，τ のいろいろな値に対してこの関数のグラフがプロットしてある．

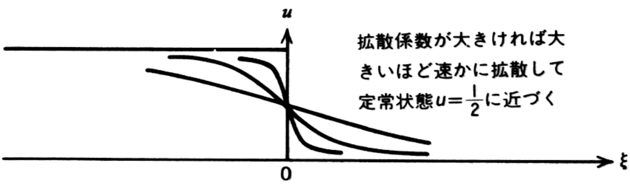


図 15.6　高濃度から低濃度への単純な拡散

最後に，座標 x と t で表した問題の解を求めるため

$$\xi=x-Vt$$

$$\tau=t$$

を式 (15.3) に代入すると，

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\dfrac{Vt-x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right] & (Vt>x)\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\dfrac{x-Vt}{2\sqrt{Dt}}\right) & (Vt\leqslant x)\end{cases} \tag{15.4}$$

が得られる．これがわれわれの拡散・対流問題 (15.2) の解である．この解の物理的意味は非常にわかりやすい．すなわち，この解は図 15.6 を時間と共に動かしただけのものである．いいかえれば，D (拡散係数) と V (流れの速度) の相対的な大きさにより，解は速度 V で右へ動くが，また同時に，その波面は D によって定められる割合で拡散している (図 15.7 は波面が崩れていくところを示す)．

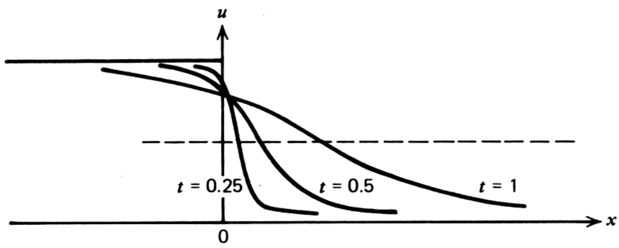


図 15.7 動きながら拡散する拡散・対流の解

注意

座標変換は偏微分方程式の非常に大切な技術である．異なる座標で物理系を眺めることによって方程式を簡単化できることがしばしばある．

練習問題

1. 初期値問題

$$u_t = u_{xx} - 2u_x \quad (-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty)$$
$$u(x,0) = \sin x \quad (-\infty < x < \infty)$$

を解け．

2. 次の拡散・対流問題を第8課で示した変換によって解け．

$$u_t = u_{xx} - 2u_x \quad (-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty)$$
$$u(x,0) = e^x \sin x \quad (-\infty < x < \infty)$$

3. 次の**対流**問題の解は何か．

偏微分方程式 $u_t = -2u_x \quad (-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty)$

初期条件 $u(x,0) = e^{-x^2}$

答えが確かかどうか調べてみよ．

4.

$$u_t = Du_{xx} - Vu_x \quad (-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty)$$
$$u(x,0) = e^{-x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

を解け．解は合っているか．いろいろな時刻に，解はどのような形をしているか．

ヒント 動く座標系に変換することによって，偏微分方程式の Vu_x の項を本質的に無視できることに注意せよ．**新しい**問題

偏微分方程式 $u_\tau = Du_{\xi\xi} \quad (-\infty < \xi < \infty,\ 0 < \tau < \infty)$

初期条件 $u(\xi,0) = e^{-\xi^2} \quad (-\infty < \xi < \infty)$

を解いてから，$\xi=x-Vt$，$\tau=t$ という置き変えをすればよい．具体的にこの問題では，積分

$$u(\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{D\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}e^{-(\xi-\beta)^2/(4D\tau)}d\beta$$

を式で計算することが可能である．この解は第12課の Fourier 変換による解である．上の被積分関数を書き直して，“積分の公式集”を探した方が便利かもしれない．

第3部

双曲型の問題

第16課　1次元波動方程式(双曲型方程式)

目的：　1次元波動方程式

$$u_{tt}=\alpha^2 u_{xx}$$

を新たに導入し，これが弦の振動を記述するものであることを示すこと．また，この方程式を Newton の運動方程式から導き出す方法も示す．さらに，波動方程式のいくつかの変種，たとえば

$$u_{tt}=\alpha^2 u_{xx}+F(x,t)$$

$$u_{tt}=\alpha^2 u_{xx}-\beta u_t-\lambda u+F(x,t)$$

というようなもの，についても論じる．

これまでは1次元放物型方程式で表される物理現象（拡散問題）を扱ってきた．今度は，第2の重要クラスの偏微分方程式である双曲型方程式について学ぶことにしよう．まず，1次元波動方程式から始める．これは，特に，弦の横振動を表す．

弦の振動の問題

両端が固定された弦の微小振動を考えよう．弦は，ピンと張られていて，均質な物質からできていて，重力の影響を受けず，振動は一つの平面内で起きると仮定する（図 16.1）．

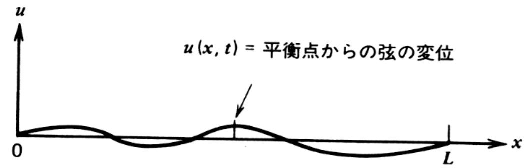


図 16.1　弦の横振動

この弦の振動を数学的に記述するため，弦のごく短い断片に作用するすべての力を考えてみる（図 16.2）．

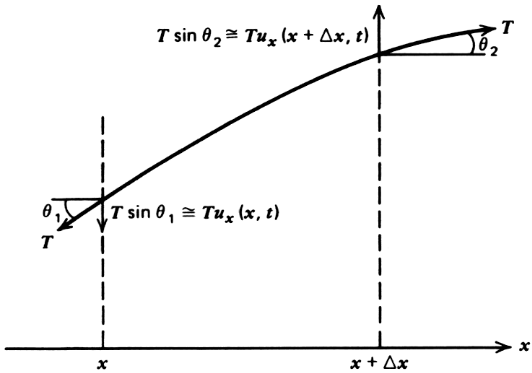


図 16.2　振動する弦の小片 $(x, x+\Delta x)$

波動方程式は，本質的には，Newton の運動方程式を弦に適用したものに他ならない（弦の小片の運動量の変化率 mu_{tt} がその小片に加えられる力に等しいということ）．図 16.2 を見て，弦に作用するいろいろな力の x 軸と垂直な方向の成分を考えよう．それらは

1. 弦の張力による正味の力（$\alpha^2 u_{xx}$）

   張力は弦の小片に次のような正味横方向の力を生じさせる：

$$\text{張力による横方向の力} = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1$$
$$\cong T[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t)]$$

2. 外力 $F(x, t)$

   任意の点，任意の時刻において，弦に外力 $F(x, t)$ が加えられることもある．例を挙げると

   （a）　重力 $F(x, t) = -mg$

   （b）　いろいろな時刻に弦に加えられるインパルス力

   （c）　太鼓の膜のようなものの振動を表す２次元波動方程式（後の課で学ぶ）では，膜の表面にぶつかる音波によって力が加えられることもある．

3. 弦に対する摩擦力（$-\beta u_t$）

弦の速度 u_t に比例する抵抗力を発生するような媒質の中で弦が振動しているならば，その抵抗力は $-\beta u_t$ と表される．

4. 復元力（$-\gamma u$）
   弦の変位と逆の向きをもつ力である．変位が正（x 軸の上方）のとき，力は負（下向き）である．

弦の小片に Newton の運動方程式

$$mu_{tt}=\text{小片}\ (x, x+\Delta x)\ \text{に加えられる力}$$

を適用すると，

$$\Delta x\rho u_{tt}=T[u_x(x+\Delta x, t)-u_x(x, t)]+\Delta xF(x, t)$$
$$-\Delta x\beta u_t(x, t)-\Delta x\gamma u(x, t)$$

となる．ここで，ρ は弦の密度である．この式の両辺を Δx で割り $\Delta x\to 0$ とすると，有名な**電信方程式**

$$u_{tt}=\alpha^2u_{xx}-\beta u_t-\gamma u+F(x, t) \tag{16.1}$$

が得られる．これが所望の方程式である（式（16.1）の $\beta, \gamma, F(x, t)$ は ρ で割らなければならないが，簡単のためそれらをあらためて β, γ, F と記してあることに注意）．次に，簡単な波動方程式

$$u_{tt}=\alpha^2u_{xx} \tag{16.2}$$

の直観的意味を示そう．

波動方程式の直観的意味

バイオリンの弦の振動のようなものを表すのになぜ（16.2）のような式が現れるのであろうか．これに答えるには，u_{tt} が点 x における弦の鉛直加速度を表すということを理解しなければならない．したがって，式（16.2）が述べて

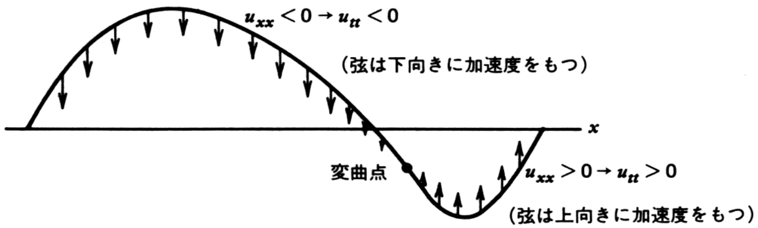


図 16.3　波動方程式 $u_{tt}=\alpha^2u_{xx}$ の意味

いることは，弦の各点の加速度が弦の張力によって生じるということ，そして弦の凹み方 u_{xx} が大きければ大きいほど力が強いということ（その比例定数が $\alpha^2=T/\rho$）であると解釈できる．図 16.3 を見よ．

注意

1. 波動方程式 $u_{tt}=\alpha^2u_{xx}$ は，また，棒の縦振動やねじれの振動も記述することができる．棒の縦振動では，（金槌で棒の端をたたいたときのように）変位が棒に平行で $u(x,t)$ が棒の各点の平衡位置からの縦方向の変位を表す．偏微分方程式は横振動の場合とほぼ同じ方法で導くことができる．ヤング率（棒の弾力性の尺度）と呼ばれる物理定数（正しくはヤング率を棒の密度で割ったもの）を k とすると，
$$u_{tt}=ku_{xx}$$
で与えられる．ヤング率の大きい物質は速く振動する．音波も縦振動の波（縦波）である．
2. 振動する弦の密度 $\rho(x)$ が場所により変化する場合の波動方程式は
$$u_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}[\alpha^2(x)u_x]$$
となる．つまり，偏微分方程式は変数係数となる．
3. 波動方程式 $u_{tt}=\alpha^2u_{xx}$ は時間に関する2次微分 u_{tt} を含むから，$t>0$ に対して解を一意に決めるためには二つの初期条件
$$u(x,0)=f(x) \quad （弦の初期位置）$$
$$u_t(x,0)=g(x) \quad （弦の初速度）$$
が必要である．この点が，初期条件が一つしか必要でなかった熱伝導方程式と対照的である．
4. 1次元波動方程式で表されるもう一つの典型的なものが，電線を伝わる電気の流れである．Kirchhoff（キルヒホッフ）の法則を使うと，次の2元連立1階偏微分方程式が得られる：
$$\begin{aligned} &i_x+Cv_t+Gv=0 \\ &v_x+Li_t+Ri=0 \end{aligned} \tag{16.3}$$
ここで
x＝電線に沿っての位置
t＝時間

i＝電線に沿っての電流

$v(x, t)$＝電線に沿っての電圧

C＝電線単位長あたりの容量

G＝電線単位長あたりの漏洩コンダクタンス

R＝電線単位長あたりの抵抗

L＝電線単位長あたりの自己インダクタンス

である．式（16.3）はよく知られた**伝送路方程式**である．普通はこの形のままではなく，もう少し手を加える．すなわち，第1式を x で微分し，第2式を t で微分して C を掛け，そして引き算する．すると，

$$i_{xx}+Gv_x-CLi_{tt}-CRi_t=0$$

が得られる．さらに，（16.3）の第2式

$$v_x=-Li_t-Ri$$

を使うと

(16.4)
$$i_{xx}=CLi_{tt}+(CR+GL)i_t+GRi$$

となる．これが，電流に対する伝送路方程式と呼ばれるもので，2階の双曲型方程式である（C あるいは L が零でない限り双曲型，C あるいは L が零の場合は放物型方程式）．

電圧についての伝送路方程式もある：

(16.5)
$$v_{xx}=CLv_{tt}+(CR+GL)v_t+GRv$$

$G=R=0$ ならば

(16.6)
$$v_{tt}=\alpha^2 v_{xx} \qquad \alpha^2=\frac{1}{CL}$$
$$i_{tt}=\alpha^2 i_{xx}$$

となることにも注意せよ．

練習問題

1. 2元連立1階偏微分方程式（16.3）から v についての伝送路方程式（16.5）を導け．
2. 波動方程式の各項の意味を知っているはずであるから，それに基づいて，次の問題の解がいろいろな時刻にどんな形をしているかを予想せよ．

偏微分方程式　$u_{tt}=u_{xx}-u_t \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0, t)=0 \\ u(1, t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x, 0)=\sin(\pi x) \\ u_t(x, 0)=0 \end{cases} \quad (0\leqq x\leqq 1)$

3. いろいろな時刻において次の問題の解はどんな形をしているか.

偏微分方程式 $u_{tt}=u_{xx}$ $(0<x<1)$

境界条件 $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=\sin t \end{cases}$ $(0<t<\infty)$

初期条件 $\begin{cases} u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

この問題の物理的意味は何か.

4.
$$u(x,t)=e^{ax+bt}$$
という形の解を探すことにより, $u_{tt}=u_{xx}$ の解をいくつ求めることができるか. 二つの解の和も解か.

参考書

P. Berg, J. McGregor, *Elementary Partial Differential Equations*, Holden-Day, 1966. 優れた参考書である.

第 17 課　波動方程式の D'Alembert 解

目的：初期値問題

偏微分方程式　$u_{tt}=c^2u_{xx}$　$(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$　$(-\infty<x<\infty)$

の解を求めること．この問題（境界のない問題）は，与えられた初期条件の下での無限に長い弦の運動を記述している．1750 年頃フランスの数学者 D'Alembert（ダランベール）がこの問題を解いた．このいわゆる D'Alembert 解

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\xi)d\xi$$

は，上記の二つの初期条件さえ与えられれば，簡単に計算できる．さらに，この解は波動が伝播する模様を示していると解釈できるので興味深い．

放物型の場合を思い出してみよう．われわれは，空間変数が有界な場合の拡散問題を（変数分離により）解くことから始めて，次に，有界でない場合 $(-\infty<x<\infty)$ を Fourier 変換によって解くことへと進んだ．双曲型の場合（波動問題）では，逆の順にしよう．まず自由空間の 1 次元波動方程式を解くことから始める．すなわち，純粋な初期値問題

(17.1)

偏微分方程式　$u_{tt}=c^2u_{xx}$　$(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$　$(-\infty<x<\infty)$

から始める．この問題は Fourier 変換（x を変換する）を使って解くこともできるし，Laplace 変換（t を変換する）で解くこともできるが，さらにもう一つの新しい技術（標準座標）を導入して，いくつかの新しくて面白い考え方

を提示することにしよう．とにかく，問題（17.1）を解こう．この技術は基本的には第15課の動座標系の方法と同じである．

1次元波動方程式の D'Alembert 解

いくつかのステップに分けて問題（17.1）を解く．

〈ステップ 1〉（(x,t) を新しい標準座標（ξ,η）で置き変える）

（17.1）を解くに当たり，二つの独立変数 x と t を二つの新しい時空座標（ξ,η）

$$\xi=x+ct$$

$$\eta=x-ct$$

で置き変えると，偏微分方程式

$$u_{tt}=c^2u_{xx}$$

は

$$u_{\xi\eta}=0$$

に変換されることがわかる．これはわかりやすい話である．実際，合成関数の微分を単に適用するだけで

$$\begin{aligned} u_x&=u_\xi+u_\eta \\ u_t&=c(u_\xi-u_\eta) \\ u_{xx}&=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{tt}&=c^2(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}) \end{aligned} \tag{17.2}$$

が得られるが，この u_{tt} と u_{xx} の表現式を元の波動方程式に代入すると

$$u_{\xi\eta}=0$$

が得られる．これでステップ1は終わりである．

〈ステップ 2〉（変換された方程式を解く）

この新しい方程式は，ただすなおに2回積分する（まず ξ に関して次に η に関して）ことによって簡単に解ける．ξ に関して積分すると

$$u_\eta(\xi,\eta)=\phi(\eta) \quad (\phi(\eta)\ は\ \eta\ の任意の関数)$$

となり，次に η に関して積分すると

$$u(\xi,\eta)=\Phi(\eta)+\psi(\xi)$$

となる．ここで，$\Phi(\eta)$ は $\phi(\eta)$ の原始関数であり，$\psi(\xi)$ は ξ の任意の関数である．つまり，

$$u_{\xi\eta}=0$$

の一般解（すべての解）は

(17.3) $$u(\xi,\eta)=\phi(\eta)+\psi(\xi)$$

という形をしているといえる．ここで，$\phi(\eta)$，$\psi(\xi)$ はそれぞれ η と ξ の任意の関数である．たとえば，関数

$$u(\xi,\eta)=\sin\eta+\xi^2$$
$$u(\xi,\eta)=1/\eta+\tan\xi$$
$$u(\xi,\eta)=\eta^2+e^\xi$$

などは皆 $u_{\xi\eta}=0$ の解であることを確かめることができる．これでステップ2は終わりである．

〈ステップ 3〉（元の座標 x と t に戻す）

$u_{tt}=c^2u_{xx}$ の一般解（すべての解）を求めるには

$$\xi=x+ct$$
$$\eta=x-ct$$

を

$$u(\xi,\eta)=\phi(\eta)+\psi(\xi)$$

に代入して

(17.4) $$u(x,t)=\phi(x-ct)+\psi(x+ct)$$

とすればよい．これが波動方程式の一般解である．これは，物理的には，互いに反対方向に速度 c で動く任意の二つの動く波の和を表しているという点で興味深い．たとえば，次の三つの関数はそれぞれこのような典型的な解である：

$u(x,t)=\sin(x-ct)$　（右方へ動く波）

$u(x,t)=(x+ct)^2$　（左方へ動く波）

$u(x,t)=\sin(x-ct)+(x+ct)^2$　（互いに反対方向に動く二つの波）

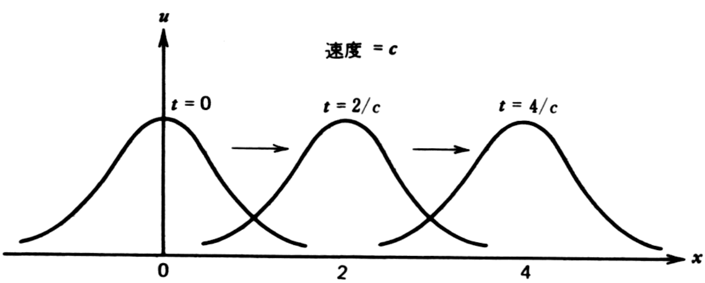


図 17.1　右方へ動く波 $u(x,t)=e^{-(x-ct)^2}$

図 17.1 は（右へ）動く単一の波

$$u(x,t)=e^{-(x-ct)^2}$$

を示す.

〈ステップ 4〉（一般解を初期条件に代入する）

常微分方程式の理論を思い出してみよう．初期値問題を解くには，一般に，まず一般解を求め，次にそれを初期条件に代入して任意定数を決めるという手順を踏んだ．この問題においても，同じような具合にすればよい．つまり，初期値問題を解くのにまず偏微分方程式の一般解（任意関数を二つ含む）

$$u(x,t)=\phi(x-ct)+\psi(x+ct)$$

を求めた．そして今度はこの式を二つの初期条件

$$u(x,0)=f(x)$$
$$u_t(x,0)=g(x)$$

に代入して任意の関数 ϕ と ψ を求めるのである．そうすると

$$(17.5)\qquad \begin{aligned}\phi(x)+\psi(x)&=f(x)\\ -c\phi'(x)+c\psi'(x)&=g(x)\end{aligned}$$

となる．(17.5) の第 2 式を積分して $\phi(x)$ と $\psi(x)$ の新しい式を得る（そして二つの方程式から $\phi(x)$ と $\psi(x)$ を代数的に解くのである）．

(17.5) の第 2 式を x_0 から x まで積分すると

$$(17.6)\qquad -c\phi(x)+c\psi(x)=\int_{x_0}^{x}g(\xi)d\xi+K$$

となる．そして (17.5) の第 1 式と (17.6) とから $\phi(x)$ と $\psi(x)$ を代数的に解いて決めると

$$(17.7)\qquad \begin{aligned}\phi(x)&=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}g(\xi)d\xi-K\\ \psi(x)&=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}g(\xi)d\xi+K\end{aligned}$$

となり，したがってわれわれの問題 (17.1) の解は

$$(17.8)\qquad u(x,t)=\frac{1}{2}\Big[f(x-ct)+f(x+ct)\Big]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\xi)d\xi$$

である．これが所望の式であり，(17.1) に対する **D'Alembert 解**といわれるものである．読者は，式をいじって，積分の両限界が $x-ct$ と $x+ct$ になることを証明してほしい．これでこの問題は終わりである．

しかし，この課を終わるに当たり，具体的な問題に対して D'Alembert 解を適用する二三の例を示すことにしよう．

D'Alembert 解の例

1. 初めに正弦波の形をしている波の運動

初期条件

$$u(x,0)=\sin x$$
$$u_t(x,0)=0$$

を考えよう．初めに正弦波であったものの解は

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(x-ct)+\sin(x+ct)]$$

となる．これは，最初の形 $u(x,0)=\sin x$ が二つの等しい形をした部分

$$\frac{\sin x}{2} \quad と \quad \frac{\sin x}{2}$$

に分かれ，その結果生じる二つの波の一方は左へ一方は右へ（それぞれ速度 c で）動くとして，それらを加え合わせたもの，と解釈することができる．読者は，この結果として得られる波の形を思い描いてみられたい．

2. 単純な矩形波の運動

この場合，初期条件

$$u(x,0)=\begin{cases}1 & (-1<x<1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$
$$u_t(x,0)=0$$

から始めて，この初期波形を等しい波形に半分ずつに分け，それぞれを反対方向に動かすと，図 17.2 に示すような波の運動を得る．

3. 初速が与えられた場合

弦の初期位置が平衡の位置にあり，（ピアノの弦をたたくときのように）初速 $\sin x$ を与えると仮定する：

$$u(x,0)=0$$
$$u_t(x,0)=\sin x$$

すると，解は

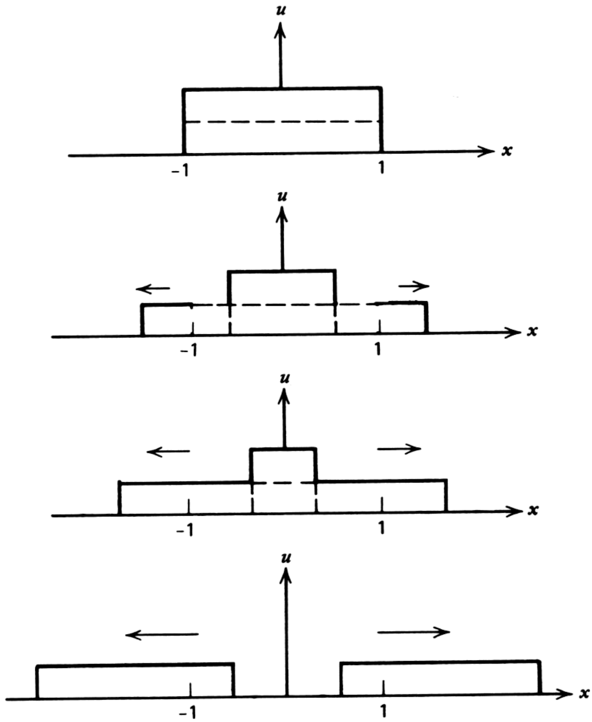


図 17.2　二つの進行波に分かれた初期波形

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\sin\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{2c}[\cos(x-ct)-\cos(x+ct)]$$

となるが，これは二つの両方向に走る余弦波の和を表す．この解が理屈に合っているかどうか吟味してみてほしい．

これで第17課は終わる．第18課では，D'Alembert 解を使って xt 平面内で現象をうまく解釈することができることを示す．

注意

1. 2階常微分方程式の一般解は二つの任意定数をもつのに対して，2階偏微分方程式は一般解の中に二つの任意関数をもつ．したがって，常微分方程式の解の個数より偏微分方程式の解の個数の方が多いということに注意せよ．
2. 方程式を簡単化するために偏微分方程式の座標系を変換するという技法は，偏微分方程式論ではごく普通の方法である．この問題の新しい座標系 (ξ, η) は標準座標系と呼ばれている．それについては後の課で，特に双曲型の問題を学ぶ折に，さらに詳しく論じることにしよう．
3. 偏微分方程式の一般解を求め，それを境界条件や初期条件に代入するやり方は，偏微分方程式を解く普通の技法ではない．この課で議論した解法がこのやり方を利用する唯一のものである．普通，偏微分方程式の一般解を求めることはできない．また，たとえできたとしても，それは複雑すぎるので付帯条件に代入することは一般にはできない．

練習問題

1. D'Alembert の一般解 (17.8) が初期値問題 (17.1) を満たすことを証明せよ．
2. (17.7) を一般解

$$u(x,t)=\phi(x-ct)+\psi(x+ct)$$

に代入して D'Alembert 解を求めよ．

3. 初期値問題

偏微分方程式　$u_{tt}=u_{xx}\quad(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=e^{-x^2} \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}\quad(-\infty<x<\infty)$

の解は何か．いろいろな時刻に解はどのような形をしているか．

4. 初期値問題

偏微分方程式　$u_{tt}=u_{xx}\quad(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=xe^{-x^2} \end{cases}\quad(-\infty<x<\infty)$

の解は何か．いろいろな時刻での解 $u(x,t)$ をグラフに描け．

5. (17.5) の第1式と (17.6) とから代数的に $\phi(x)$ と $\psi(x)$ とを解いて (17.7) を導き出せ．

参考書

C. Wylie, *Advanced Mathematics for Engineers*, McGraw-Hill, 1958. 偏微分方程式の初等的な考え方を読みやすく述べてある.

第18課　D'Alembert 解(続)

目的：　半無限の弦の問題

偏微分方程式　$u_{tt}=c^2u_{xx}$　$(0<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$u(0,t)=0$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$　$(0\leqq x<\infty)$

の波動を求めるのに D'Alembert 解を使うことができることを示すこと．さらに，D'Alembert 解の意味を xt 平面上で考える．

前の課では，式

(18.1)　$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\xi)d\xi$$

が無限に長い弦の変位 u を初期変位 $u(x,0)=f(x)$ と初速 $u_t(x,0)=g(x)$ とで表したものであるということを述べた．この課では，xt 平面（時空平面）でこの式がどう解釈できるかを示し，振動する半無限の弦の解を求めるにはこの式をどう修正したらよいかを示す．

xt 平面で (18.1) の意味を考えることから始めよう．

時空における D'Alembert 解の解釈

前の課では，純初期値問題

(18.2)

偏微分方程式　$u_{tt}=c^2u_{xx}$　$(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$　$(-\infty<x<\infty)$

の解は

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\xi)d\xi$$

で与えられることを証明した．今度は，二つの特殊な場合を眺めながら，この解の意味を xt 平面上で考えてみよう．

場合 1 （初期位置が与えられ初速が零の場合）

弦が初期条件

$$u(x,0)=f(x)$$
$$u_t(x,0)=0$$

を満たすものとする．ここで，D'Alembert 解は

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]$$

であり，点 (x_0, t_0) における解uは，図 18.1 から，直線

$$\left.\begin{aligned} x-ct&=x_0-ct_0 \\ x+ct&=x_0+ct_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{（特性曲線）}$$

をたどることによって定まる2点 $(x_0-ct_0, 0)$ と $(x_0+ct_0, 0)$ とにおける初期変位 $f(x)$ の平均であると解釈できる．

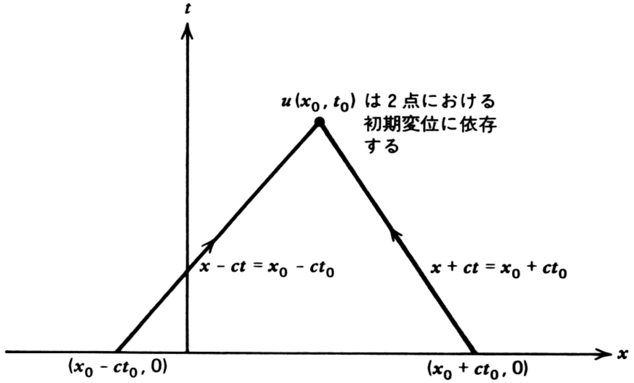


図 18.1 xt 平面における $u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]$ の解釈

たとえば，この解釈を使うと，初期値問題

偏微分方程式 $u_{tt}=c^2u_{xx}$ $(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

(18.3)

初期条件 $\begin{cases} u(x,0)=\begin{cases} 1 & (-1<x<1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$

からは図 18.2 に示すような xt 平面における解が得られる．

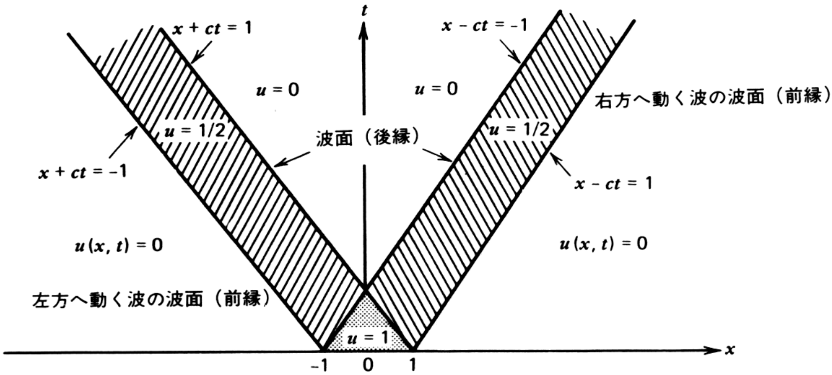


図 18.2　xt 平面における初期値問題（18.1）の解

図 18.2 は，前の課の図 17.2 のグラフに示した解を xt 平面上で表したものである．

さて次に，初期位置が零で初速が任意の場合の D'Alembert 解の意味を調べよう．

場合 2　（初期変位が零で初速が任意の場合）

次に，初期条件

$$u(x,0)=0$$
$$u_t(x,0)=g(x)$$

を考えよう．今度の解は

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\xi)d\xi$$

であるから，(x_0,t_0) における解 u は，初期直線 $t=0$ 上で x_0-ct_0 と x_0+ct_0 の間で初速を積分したものであると解釈できる（図 18.3）．

前と同様，この解釈を使うと，初期値問題

(18.4)
$$\text{偏微分方程式}\quad u_{tt}=c^2u_{xx}\quad(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$$
$$\text{初期条件}\quad \begin{cases}u(x,0)=0\\ u_t(x,0)=\begin{cases}1 & (-1<x<1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}\end{cases}$$

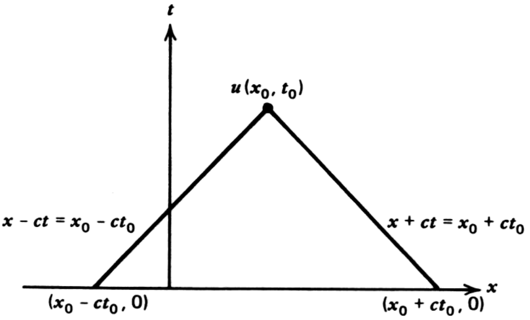


図 18.3　xt 平面における初速の解釈

は図 18.4 に示すような xt 平面上の解をもつことになる．

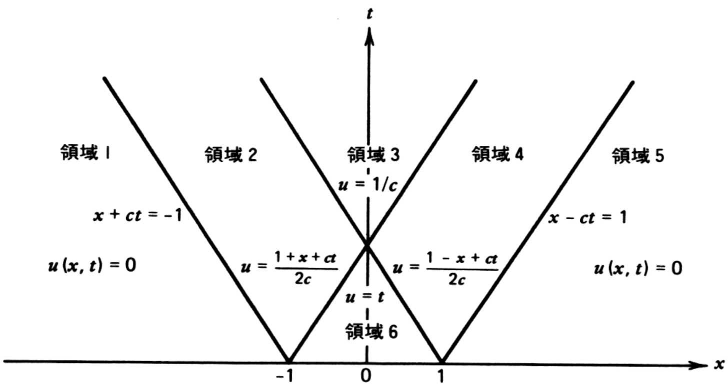


図 18.4　xt 平面における問題 (18.4) の解

問題 (18.4) は，$-1<x<1$ で弦に初期インパルス（速度=1）を与えて，その結果起きる波の運動（ピアノの弦をたたくときのような）を観察することに対応する．変位を求めるため D'Alembert 解を計算する．

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 0\,d\xi \qquad (x,t)\in 領域 1$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2c}\int_{-1}^{x+ct} d\xi & (x,t)\in 領域\,2\\
(18.5)\qquad &= \frac{1}{2c}\int_{-1}^{1} d\xi & (x,t)\in 領域\,3\\
&= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{1} d\xi & (x,t)\in 領域\,4\\
&= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 0\, d\xi & (x,t)\in 領域\,5\\
&= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} d\xi & (x,t)\in 領域\,6
\end{aligned}
$$

図 18.5 には，いろいろな時刻におけるこの解のグラフが描いてある．

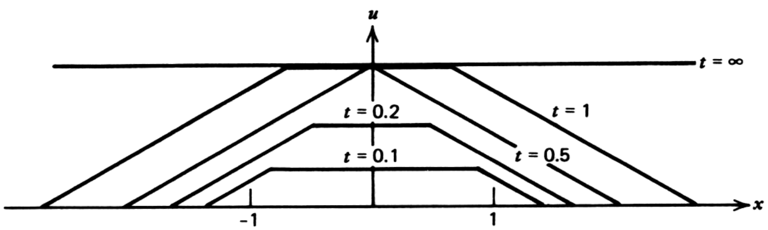


図 18.5　いろいろな時刻における問題 (18.4) の解

これで D'Alembert 解の xt 平面における解釈の話を終わる．この課の残りの部分では，半無限弦に対する初期値・境界値問題

$$
(18.6)\qquad
\begin{aligned}
&偏微分方程式 \quad u_{tt}=c^2u_{xx} \quad (0<x<\infty,\ 0<t<\infty)\\
&境界条件 \quad u(0,t)=0 \quad (0<t<\infty)\\
&初期条件 \quad \begin{cases} u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases} \quad (0<x<\infty)
\end{aligned}
$$

を D'Alembert の公式を修正することによって解くことにしよう．

D'Alembert の公式による半無限弦の解

次の目的は，左端が零に固定され，与えられた初期条件を満足するような弦の振動の波の動きを求めることである．(18.6) の解を求めるため，無限に長い弦のときに使ったのと同じような方法，すなわち，偏微分方程式の一般解

$$u(x,t)=\phi(x-ct)+\psi(x+ct)$$

をまず作るという方法をとる．第17課でやったようにこの一般解を初期条件に代入すると，

(18.7)
$$\phi(x-ct)=\frac{1}{2}f(x-ct)-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct}g(\xi)d\xi-K$$
$$\psi(x+ct)=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct}g(\xi)d\xi+K$$

に到達する（前と同じ式である）.

さて，無限長の弦を扱っているときには出会わなかった問題にここで出会う．xt 平面の第1象限（$x>0$, $t>0$）のすべての場所で通用する解 $u(x,t)$ を探しているのであるから，

$$-\infty<x-ct<\infty \quad \text{のすべてに対して} \quad \phi(x-ct)$$
$$0<x+ct<\infty \quad \text{のすべてに対して} \quad \psi(x+ct)$$

を求めなければならないことは明らかである．不幸にして，われわれの初期データ $f(x)$ と $g(x)$ は正の引数のところでしか与えられていないから，(18.7) の第1式は $x-ct\geqslant 0$ に対してしか $\phi(x-ct)$ を定めない．$x-ct\geqslant 0$ である限り，(18.7) を一般解 $u(x,t)=\phi(x-ct)+\psi(x+ct)$ に代入して，解

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\phi(x-ct)+\psi(x+ct)\\&=\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\xi)d\xi\end{aligned}$$

を求めることができるから問題ない．問題は $x<ct$ のときどうするかである．ここで境界条件 $u(0,t)=0$ が登場するわけである．すなわち，$x<ct$ のときは，この境界条件を使って $\phi(x-ct)$ を求めるのである．一般解 $u(x,t)=\phi(x-ct)+\psi(x+ct)$ を境界条件 $u(0,t)=0$ に代入すると

$$\phi(-ct)=-\psi(ct)$$

したがって，この関数関係を使って，$x<ct$ に対しては，

$$\phi(x-ct)=-\frac{1}{2}f(ct-x)-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{ct-x}g(\xi)d\xi-K$$

となる．ϕ のこの値を一般解

$$u(x,t)=\phi(x-ct)+\psi(x+ct)$$

に代入すると

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)-f(ct-x)]+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}g(\xi)d\xi$$
$$(0<x<ct)$$

が得られる．$x<ct$ の解と $x>ct$ の解を一緒にして，求める結果

$$(18.8)\quad u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct}g(\xi)d\xi & (x\geqq ct)\\ \dfrac{1}{2}[f(x+ct)-f(ct-x)]+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{ct-x}^{x+ct}g(\xi)d\xi & (x<ct)\end{cases}$$

が得られる．図 18.6 を見よ．

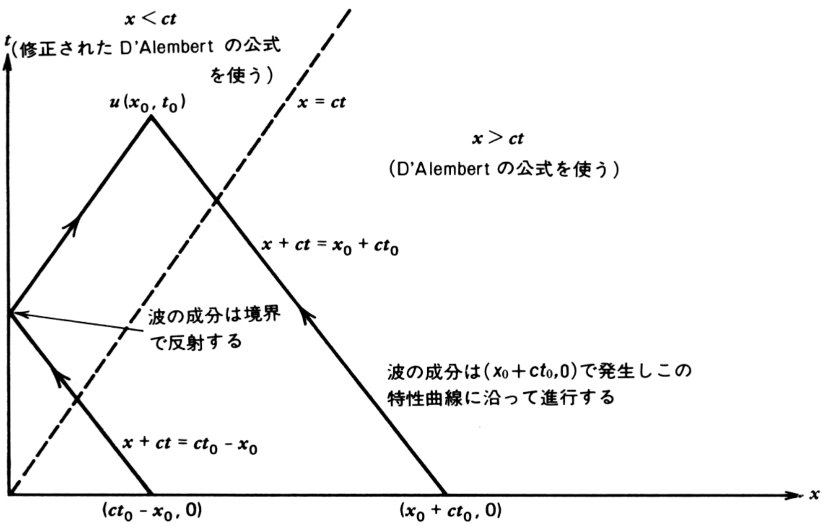


図 18.6　半無限弦の xt 平面での解釈

これでこの課を終わる．式 (18.8) の意味については下の“注意”の中で調べることにしよう．

注意

1. 式 (18.8) が，境界条件 $u(0,t)=0$ の半無限の弦の解としてわれわれが期待していたものである．$x\geqq ct$ に対しては，解は無限弦の D'Alembert 解と同じであるが，$x<ct$ では，境界での波の**反射**のために，解 $u(x,t)$ がその分だけ異なっている．(反射の際に波の符号が反転する．)
2. 境界条件 $u(0,t)=0$ を別のものにすれば解 (18.8) は当然変わる．他の境界条件，たとえば

$$u(0,t)=f(t)$$

あるいは

$$u_x(0, t)=0$$

のような場合にもまた，解を求めることができる．より詳しい情報については参考文献表にある参考書で勉強されたい．

3. 直線

$$x+ct=\text{定数}$$

$$x-ct=\text{定数}$$

は**特性曲線**と呼ばれ，この直線に沿って擾乱が伝わるのである．一般に，双曲型方程式には特性曲線が関連している．

練習問題

1. 半無限弦の問題

偏微分方程式　$u_{tt}=u_{xx}$　$(0<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$u(0, t)=0$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x, 0)=xe^{-x^2} \\ u_t(x, 0)=0 \end{cases}$　$(0<x<\infty)$

を解け．いろいろな時刻における解のグラフを描け．

2. 練習問題1の半無限弦の問題の解は次のようにしても求めることができる：

（a）　$u(x, 0)=-xe^{-x^2}$　$(-\infty<x<0)$

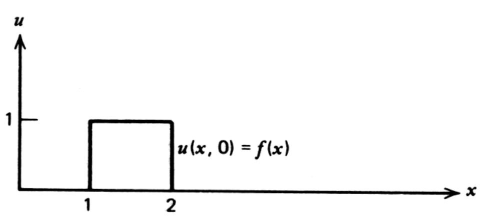
$u_t(x, 0)=0$　$(-\infty<x<0)$

とおいて初期条件を実軸全体 $-\infty<x<\infty$ に拡張する．

（b）　前の課でやったように左方へ動く波と右方へ動く波の二つの平均を作る．

（c）　解の $x\geqq 0$ の部分に着目する．

この考え方を使って，次の図に示すような初期条件の解を（t のいろいろな値に対して）グラフに描け．



3. この課で半無限弦の問題を解いた方法の類推で，半無限弦の問題

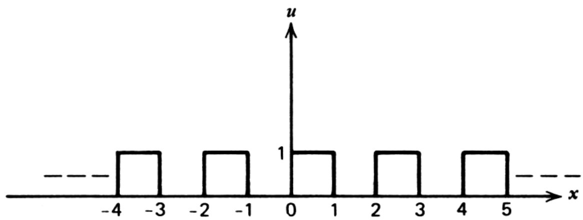
偏微分方程式　$u_{tt}=c^2u_{xx}$　$(0<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$u_x(0,t)=0$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$　$(0\leqq x<\infty)$

を解け．

4. 弦の振動が $u_{tt}=u_{xx}$ で表され，初期変位が次の図で与えられるものとする．初速 $u_t(x,0)=0$ を仮定して，この問題の解を xt 平面の上で記述せよ．この問題では初期条件 $u(x,0)$ が不連続であることに注意せよ．



参考書

C. Chester, *Techniques in Partial Differential Equations*, McGraw-Hill, 1971.
第2章には D'Alembert の方程式の多くの変形が取り上げられている．この課で話をした半無限の問題も含まれている．

第19課　波動方程式に関連した境界条件

目的：（空間変数が有界の）波動方程式

$$u_{tt}=c^2u_{xx} \quad (0<x<L,\ 0<t<\infty)$$

には，一般にいって，次の3種類の境界条件のどれか（あるいはそれらを混ぜ合わせたもの）が関連しているのが普通であることを示し，これらの問題の解の性質を調べること：

1. <u>両端の変位を指定</u>（第1種）

$$u(0,t)=g_1(t)$$
$$u(L,t)=g_2(t)$$

2. <u>両端に加わる力を指定</u>（第2種）

$$u_x(0,t)=g_1(t)$$
$$u_x(L,t)=g_2(t)$$

3. <u>両端を弾性支持</u>（第3種）

$$u_x(0,t)-\gamma_1u(0,t)=g_1(t)$$
$$u_x(L,t)-\gamma_2u(L,t)=g_2(t)$$

今まで論じてきた波の種類は弦の1次元横振動だけであった．波動現象全体から見るとこれは氷山の一角にしかすぎない．重要な種類の振動には，その他にも，次のようなものがある：

1. 音波（縦波）
2. 電磁波（光や電波）
3. 固体内の振動（縦波，横波，ねじれ波）
4. 量子力学における確率波
5. 水波（横波）
6. 弦の振動（横波）

この課の目的は，この種の物理的問題に関連したいろいろな型の境界条件につ

いて論じることである．ここでは，一般に次の3種類のうちのどれかに分類されるような（線形）境界条件をもつ1次元問題を取り扱うことにする：

1. 両端の変位を指定（第1種）

$$u(0,t)=g_1(t)$$
$$u(L,t)=g_2(t)$$

2. 両端に加わる力を指定（第2種）

$$u_x(0,t)=g_1(t)$$
$$u_x(L,t)=g_2(t)$$

3. 両端を弾性支持（第3種）

$$u_x(0,t)-\gamma_1 u(0,t)=g_1(t)$$
$$u_x(L,t)-\gamma_2 u(L,t)=g_2(t)$$

第1種の境界条件の話から始めよう．

1. 両端の変位を指定した場合

まず，次の形の問題を取り上げよう：

$$\text{(19.1)}\quad \begin{aligned} &\text{偏微分方程式} \quad u_{tt}=c^2u_{xx} \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty) \\ &\text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0,t)=g_1(t) \\ u(1,t)=g_2(t) \end{cases} \quad (0<t<\infty) \\ &\text{初期条件} \quad \begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases} \quad (0\leqslant x\leqslant 1) \end{aligned}$$

これは，端点の位置を任意に指定した通りに動かすという条件である（図19.1）．

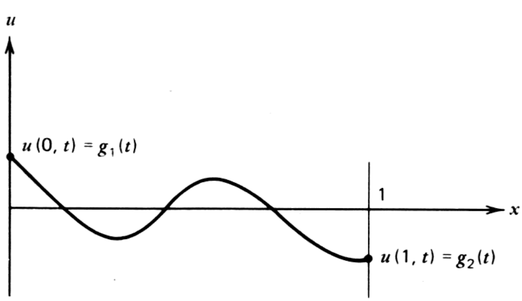


図 19.1　振動弦の両端の変位を指定する

この種の典型的な問題としては，左端を固定した棒の右端を（$t=1$ において）突然ある角度だけねじり，その結果生じるねじれ振動を観察する問題などがある（図 19.2）．

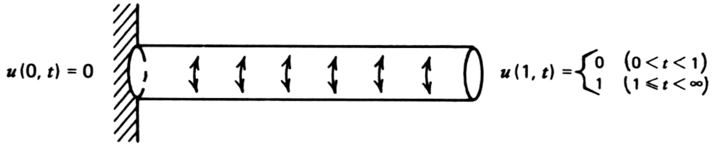


図 19.2　棒のねじれ振動

制御数学の分野には，「振動する弦の揺れを最小時間で零にするような境界条件の関数 $g_2(t)$ を決定せよ」という大切な問題がある．

2.　両端に加わる力を指定する場合

弦の端が摩擦のないスリーブ上を垂直に滑ることができるようにしておけば，弦の左端と右端における垂直方向の力が，それぞれ，$Tu_x(0,t)$，$Tu_x(L,t)$ であるから，境界条件は

$$u_x(0,t)=0$$
$$u_x(L,t)=0$$

となる．図 19.3 を見よ．

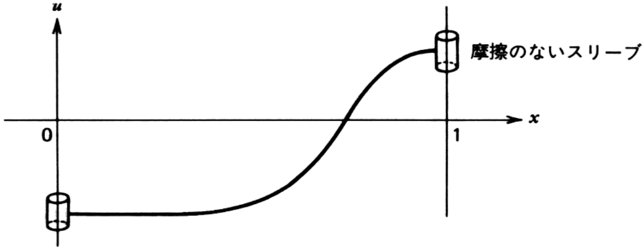


図 19.3　弦の自由境界条件

これと似た境界条件は次の二つの例にも現れる．

（a）　縦振動するバネの自由端

下端が固定されていないバネの振動を考えよ（図 19.4）．

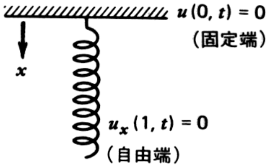


図 19.4　振動するバネの自由端

（b）　一端に加えられる力が指定されたバネの振動

端 $x=1$ に $v(t)$ だけの力（下向きに働く力を正とする）を加えると，境界条件は

$$u_x(1,t)=\frac{1}{k}v(t) \quad (k \text{はヤング率})$$

となる．

加えられる力が指定されているような境界条件のときには，弦（あるいはバネ）の端の位置を与えられた通りに動かすのではなくて，加えた力によって境界の位置が動くのである．物理学では，振動する電子に電場（力）が作用するときこのような問題が登場する．

3.　両端を弾性支持した場合

最後に，端に図 19.5 に示すような弾性のある留金を取り付けたバイオリンの弦を考えよう．

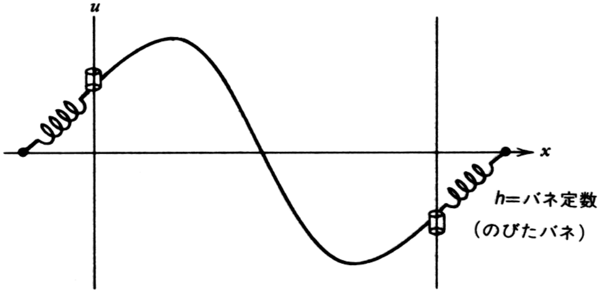


図 19.5　弾性のある留金を付けたところの図

ここで，バネの留金があるので，両端では変位

$$\text{左端の変位}=u(0,t)$$

$$右端の変位=u(L,t)$$

に比例して垂直方向の力が生じる．両端での弦の垂直方向の張力，すなわち

$$\begin{aligned}&\text{左端で上向きの張力}=Tu_x(0,t)\\&\text{右端で下向きの張力}=-Tu_x(L,t)\end{aligned}\qquad (T=\text{弦の張力})$$

をこの変位（にバネ定数 h を掛けたもの）に等しいと置くと，求める境界条件

(19.2)
$$u_x(0,t)=\frac{h}{T}u(0,t)$$
$$u_x(L,t)=-\frac{h}{T}u(L,t)$$

が得られる．$u(0,t)$ が正ということは $u_x(0,t)$ が正ということであり，一方 $u(L,t)$ が正なら $u_x(L,t)$ は負であることに注意せよ．これらは同次境界条件であって

(19.3)
$$u_x(0,t)-\frac{h}{T}u(0,t)=0$$
$$u_x(L,t)+\frac{h}{T}u(L,t)=0$$

とも書き変えられる．もし，関数 $\theta_1(t)$ と $\theta_2(t)$ に従って二つのバネの留金を留めてある位置をずらすならば，非同次境界条件

(19.4)
$$u_x(0,t)=\frac{h}{T}[u(0,t)-\theta_1(t)]$$
$$u_x(L,t)=-\frac{h}{T}[u(L,t)-\theta_2(t)]$$

が得られる．図 19.6 を見よ．

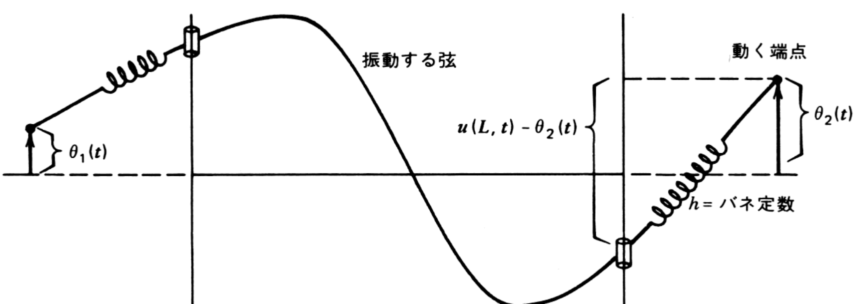


図 19.6　非同次弾性境界条件の説明図

双曲型問題に関連した最もありふれた型の境界条件についての話はこれで終わる．次のいくつかの課で，これに類する境界条件をもつ問題を解くことにしよう．

注意

1. 振動する弦の端点に弦の速度に比例する（そして反対方向の）力が働くときには，この課では論じなかったもう一つ別の種類の境界条件が登場する．このときの境界条件（左端）は
$$Tu_x(0,t)=-\beta u_t(0,t)$$
である．
2. 弦の左端に非線形の弾性をもつ留金を用いるときは，$\phi(u)$ を変位と張力を関係づける非線形の関数として，
$$Tu_x(0,t)=\phi[u(0,t)]$$
である．たとえば，
$$Tu_x(0,t)=-hu^3(0,t)$$
は弦の左端での復元力が変位の 3 乗に比例することを表している（フックの法則が成立する線形の場合には復元力は変位に比例する）．
3. 縦方向に振動するバネの下端に質量 m の物体を取り付けると，境界条件は
$$mu_{tt}(L,t)=-ku_x(L,t)+mg$$
となる．

練習問題

1. いろいろな種類の境界条件についての直観から，

偏微分方程式　$u_{tt}=c^2u_{xx}\quad(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases}u(0,t)=0\\u(1,t)=\sin t\end{cases}\quad(0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases}u(x,0)=0\\u_t(x,0)=0\end{cases}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$

の解のいろいろな時刻における概略のグラフを描け．

2. 偏微分方程式　$u_{tt}=u_{xx}\quad(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases}u(0,t)=0\\u_x(1,t)=0\end{cases}\quad(0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=\sin\dfrac{\pi x}{2} \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$　$(0\leqq x\leqq 1)$

の解のいろいろな時刻における概略のグラフを描け.

3. 境界条件

$$u_x(0,t)=\frac{h}{T}[u(0,t)-\theta_1(t)]$$

の

（a）　$h\to\infty$

（b）　$h\to 0$

のときの一般的な性質はどんなか．それは読者の直観と一致するか.

4. 偏微分方程式　$u_{tt}=u_{xx}$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u_x(1,t)=-u(1,t) \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=x \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$　$(0\leqq x\leqq 1)$

の解の概略のグラフを描け.

参考書

R. L. Street, *Analysis and Solution of Partial Differential Equations*, Brooks/Cole, 1973. 初期条件と境界条件について詳しく扱った章（第2章）のある優れた教科書である.

第20課　有限な弦の振動(定常波)

目的：　初期値・境界値問題

偏微分方程式　$u_{tt}=\alpha^2 u_{xx}$　$(0<x<L,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$　$(0\leqslant x\leqslant L)$

が表している有限な弦の横振動は，標準的な変数分離の技法によって扱うことができることを示し，ある Sturm-Liouville（ステュルム・リウヴィル）型境界値問題の解（固有関数）X_n を用いて，解 $u(x,t)$ が単純振動の無限和

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\,T_n(t)$$

の形に表せることを示すこと．

これまでに，変域が無限である（$-\infty<x<\infty$）場合の波動方程式 $u_{tt}=c^2u_{xx}$ を学び，解（D'Alembert 解）が進行波（互いに反対方向に動く）であるということを見てきた．同じ波動方程式でも，空間領域が有界（$0<x<L$）であるときには，波が境界と繰り返し相互作用するため，もはや波が進行しているようには見えない．つまり，定常波と呼ばれるようなものに見える．たとえば，簡単な双曲型初期値・境界値問題

偏微分方程式　$u_{tt}=\alpha^2 u_{xx}$　$(0<x<L,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$　$(0\leqslant x\leqslant L)$

で表されるギターの弦（両端 $x=0$, $x=L$ で固定）が駆動されたとき何が起きるかを考えてみよう．このとき何が起きるかというと，この偏微分方程式と初期条件に対する進行波解は境界での反射を繰り返し，あたかも波が左右に動かないで同じ場所で振動しているように見えるのである．たとえば，代表的な二三の定常波を図 20.1 に示す．

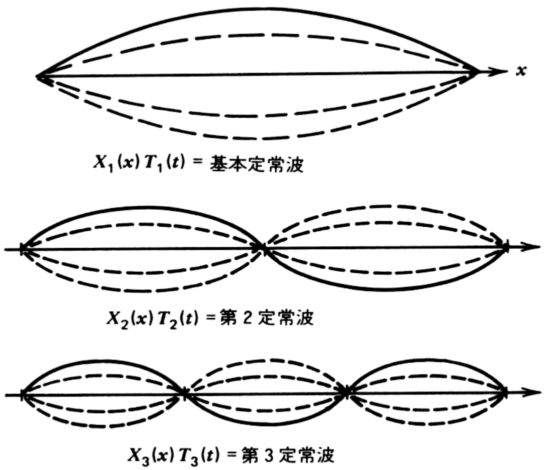


図 20.1　三つの代表的な定常波 $X(x)T(t)$

これらの定常波の形 $X_n(x)$ とそれぞれの振動 $T_n(t)$ とがわかれば，振動するギターの弦の解を求めるには，単純振動 $X_n(x)T_n(t)$ の和

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x)\,T_n(t)$$

を作り，その和が初期条件——$t=0$ のとき $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=g(x)$—に一致するように係数 c_n を決めさえすればよい．

さて，変数分離の方法によりギターの弦の問題を解くことにしよう．

有限な弦の振動の変数分離法による解

初期値・境界値問題

偏微分方程式　$u_{tt}=\alpha^2 u_{xx}$　$(0<x<L,\ 0<t<\infty)$

$$
(20.1)\qquad \text{境界条件}\quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty)
$$

$$
\text{初期条件}\quad \begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases} \quad (0\leqslant x\leqslant L)
$$

を解くため，偏微分方程式の定常波解，すなわち，

$$
u(x,t)=X(x)T(t)
$$

という形の解を探すことから始めよう．この式を波動方程式に代入して変数を分離すると，二つの常微分方程式

$$
T''-\alpha^2\lambda T=0
$$

$$
X''-\lambda X=0
$$

が得られる．ここで，定数 λ は $-\infty<\lambda<\infty$ の任意の数でよい．

λ のあらゆる値に対してこれら二つの常微分方程式の解を調べると，図 20.2 の図式が得られる．

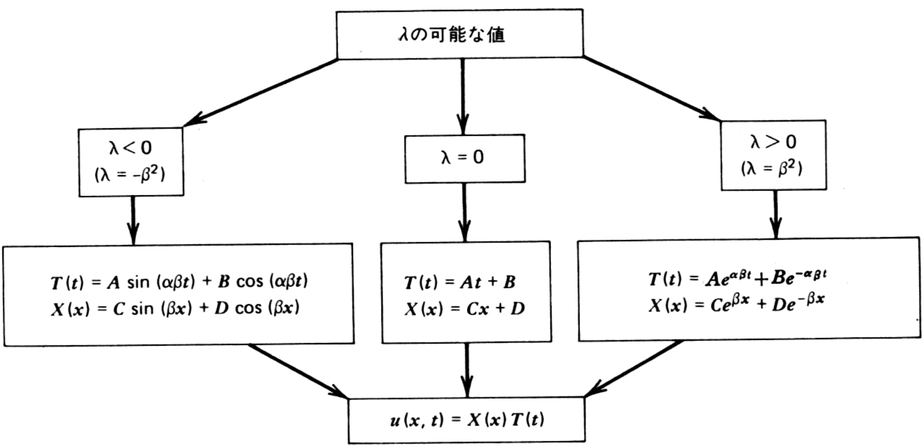


図 20.2　λ のいろいろな値に対する定常波解

次に考えることは，$t\to\infty$ のとき有界でなくなる定常波や，境界条件 $u(0,t)=u(L,t)=0$ に代入したとき零の解しか得られないような定常波をすべて取り除くことである．λ の負の値だけが許容しうる（非零で有界な）解を与えるということを証明する仕事は読者の練習問題として残しておこう．したがって，われわれの目標は，式

$$u(x,t)=[C\sin(\beta x)+D\cos(\beta x)][A\sin(\alpha\beta t)+B\cos(\alpha\beta t)] \tag{20.2}$$

が境界条件を満足するように定数 A, B, C, D と負の分離定数 λ とを決めることである．このようにして，弦の基本振動の集合が得られる．あとは，その和を作り（和も偏微分方程式と境界条件を満たす），和が $t=0$ のときの初期条件を満足するようにすればよい．

(20.2) を $u(0,t)=u(L,t)=0$ に代入すると

$$\begin{aligned} u(0,t)&=X(0)T(t)=D[A\sin(\alpha\beta t)+B\cos(\alpha\beta t)]=0\Rightarrow D=0\\ u(L,t)&=X(L)T(t)\\ &=C\sin(\beta L)[A\sin(\alpha\beta t)+B\cos(\alpha\beta t)]=0\Rightarrow\sin(\beta L)=0 \end{aligned} \tag{20.3}$$

となる．すなわち，分離定数 β（λ のことは忘れて，β を求めればよい）は $\sin(\beta L)=0$ を満足しなければならない．つまり

$$\beta_n=\frac{n\pi}{L}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

である．(20.3) の第2の式で $C=0$ と選ぶと $X(x)T(t)=0$ となってしまうから $C=0$ とはできないことに注意せよ．このようにして，次のような単純振動の系列が得られた（添字を n とする）：

$$\begin{aligned} u_n(x,t)&=X_n(x)T_n(t)\\ &=\sin(n\pi x/L)[a_n\sin(n\pi\alpha t/L)+b_n\cos(n\pi\alpha t/L)]\\ &\qquad(n=1,2,3,\cdots) \end{aligned} \tag{20.4}$$

あるいは，

$$u_n(x,t)=R_n\sin(n\pi x/L)\cos[n\pi\alpha(t-\delta_n)/L]$$

（ここで，定数 a_n, b_n, R_n, δ_n は任意である）．これらはすべて波動方程式と境界条件を満たす．この関数列が図 20.3 のような形の定常波（波の各点が同じ周期で振動するという性質をもつ）の族を構成することは，読者には容易にわかるはずである．

これらの振動の和もまたすべて偏微分方程式と境界条件を満たす解であるから（偏微分方程式と境界条件が線形で同次であるから），それらを足し合わせて，その結果得られる和が初期条件をも満足するようにする．そうするとそれがわれわれの問題の解となるであろう．和

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi x/L)[a_n\sin(n\pi\alpha t/L)+b_n\cos(n\pi\alpha t/L)]$$

を初期条件

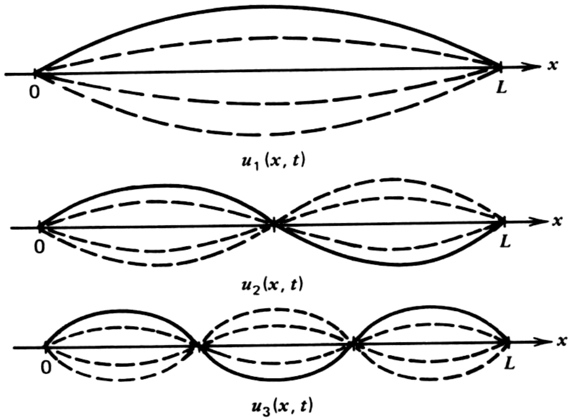


図 20.3　定常波 $u_n(x, t)=X_n(x)T_n(t)$

$$u(x, 0)=f(x)$$
$$u_t(x, 0)=g(x)$$

に代入すると，二つの方程式

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L)=f(x)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(n\pi\alpha/L)\sin(n\pi x/L)=g(x)$$

が得られる．直交性の条件

$$\int_0^L \sin(m\pi x/L)\sin(n\pi x/L)dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ L/2 & (m=n)\end{cases}$$

を使うと係数 a_n と b_n が次のように求まる：

(20.5)★
$$a_n=\frac{2}{n\pi\alpha}\int_0^L g(x)\sin(n\pi x/L)dx$$
$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)dx$$

これですべて完了した．解は

(20.6)★　$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi x/L)[a_n\sin(n\pi\alpha t/L)+b_n\cos(n\pi\alpha t/L)]$$

である．ここで，係数 a_n と b_n は (20.5) で与えられる．これで問題の解は

終わりであるが，最後に，二三の有用な観察をしよう．

注意

1. 弦の初速が零ならば，解（20.6）は

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L)\cos(n\pi\alpha t/L)$$

という形になり，次のように解釈できる．最初の弦の位置

$$u(x,0)=f(x)$$

を単純な正弦関数の成分に Fourier 分解する：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L)$$

そして正弦関数の各項を

$$u_n(x,t)=b_n \sin(n\pi x/L)\cos(n\pi\alpha t/L)$$

に従ってそれぞれ独立に振動させる（これが基本振動である）．この型の振動をすべて足し合わせるとわれわれの問題に対する解が得られる．たとえば，最初の弦の位置 $f(x)$ が

$$f(x)=\sin(\pi x/L)+0.5\sin(3\pi x/L)+0.25\sin(5\pi x/L)$$

であるとしよう．この初期条件に対する応答は，各項の応答の和となる．すなわち

$$u(x,t)=\sin(\pi x/L)\cos(\pi\alpha t/L)+0.5\sin(3\pi x/L)\cos(3\pi\alpha t/L)$$
$$+0.25\sin(5\pi x/L)\cos(5\pi\alpha t/L)$$

2. 解（20.6）の第 n 項

$$\sin(n\pi x/L)[a_n\sin(n\pi\alpha t/L)+b_n\cos(n\pi\alpha t/L)]$$

を**振動の第 n モード**あるいは**第 n 倍音**（**第 n 次高調波**）と呼ぶ．三角関数の公式を使えばこの倍音は

$$R_n\sin(n\pi x/L)\cos[n\pi\alpha(t-\delta_n)/L]$$

と書くことができる．ここで R_n と δ_n は新しい任意定数（振幅と位相角）である．第 n モードのこの新しい形の方が振動を解析するには便利である．第 n モードの角周波数 ω_n(rad/s) は

$$\omega_n=\frac{n\pi\alpha}{L}=\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

（T と ρ は，それぞれ，弦の張力と線密度）

であることに注意せよ．また，この周波数は基本周波数（$n=1$）の n 倍で

あることにも注意せよ．すべての音の周波数が基本周波数の整数倍であるという性質は，すべての型の振動に共通した性質であるわけではない．このことは，高次の周波数が基本周波数の整数倍となっていない太鼓などに比べて，バイオリンやギターの音が快いということに関係がある．

練習問題

1. 初期条件が

$$u(x,0)=\sin(\pi x/L)+0.5\sin(3\pi x/L)$$
$$u_t(x,0)=0$$

で与えられるとき，弦の振動の問題（20.1）の解を求めよ．いろいろな時刻におけるこの解のグラフを描け．解は時間の周期関数か．その周期は何か．

2. 初期条件が

$$u(x,0)=0$$
$$u_t(x,0)=\sin(3\pi x/L)$$

のとき，弦の振動の問題（20.1）の解は何か．いろいろな時刻における解のグラフはどんな形をしているか．

3. 図 20.2 において，$\lambda\geqslant 0$ に対する解 $X(x)T(t)$ が有界でないかあるいは零であることを示せ．

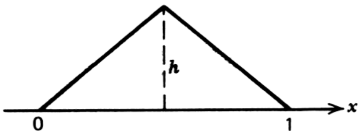
4. 初期条件が

$$u(x,0)=\sin(3\pi x/L)$$
$$u_t(x,0)=(3\pi\alpha/L)\sin(3\pi x/L)$$

のとき，弦の振動の問題の解は何か．

5. 長さ $L=1$ のギターの弦の中央を高さ h になるまで上に引張る．弦の位置は，最初

$$u(x,0)=\begin{cases}2hx & 0\leqslant x\leqslant 0.5\\ 2h(1-x) & 0.5\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$



弦の初期の位置

であるとして，急に手を離したとき，その後の弦の運動はどうなるか．

6. 弦の減衰振動の問題，すなわち

偏微分方程式 $u_{tt}=\alpha^2 u_{xx}-\beta u_t \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件 $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty)$

初期条件 $\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=0 \end{cases} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$

を解け．解はもっともらしいか．それは上の偏微分方程式，境界条件，初期条件を満足するか．

7. 下記の与えられた境界条件と初期条件をもつ非同次偏微分方程式はどうやって解けばよいか．

偏微分方程式 $u_{tt}=\alpha^2 u_{xx}+Kx \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件 $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty)$

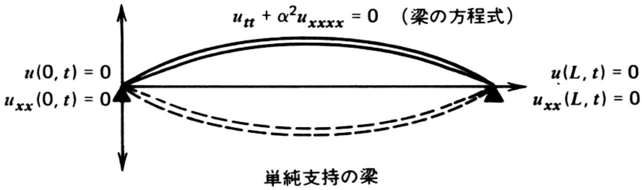
初期条件 $\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=0 \end{cases} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$

参考書

C. Wylie, *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, 1970. 多くの興味ある例を含んだとても読みやすい本である．特に第7章を見よ．

第 21 課　梁の振動 (4 階の偏微分方程式)

目的：　梁の振動の問題を考えるとき高階の偏微分方程式が登場することを示し，両端が単純に支持されている梁の振動の問題を変数分離により解くこと．また，梁の振動とバイオリンの弦の振動を比較して，その相異点を指摘する．



単純支持の梁

バイオリンの弦の横振動と細い梁の横振動との主な相違点は，梁は曲げに対して抗力を生じるという点にある．細い梁のこの曲げに対する抗力の発生機構には深入りしないが，この抗力のために梁の振動を表す波動方程式が 4 階の方程式

(21.1)
$$u_{tt} = -\alpha^2 u_{xxxx}$$

になるということができる．ここで，

$\alpha^2 = K/\rho$

K = 梁の曲げ弾性定数（K が大きいほど梁は剛く振動が速い）

ρ = 梁の線密度（質量/単位長）

この課の参考書の 1 には，この方程式の導出法が書いてある．この本ではここで始めて 3 階以上の偏微分方程式の応用例が現れるのであるから，梁の振動問題のうち典型的なものを一つ解いてみることは有用であろう．後で，他の型の梁の問題についても論じる．

両端単純支持の梁

二つの支持台の上に両端を単純支持された細い梁の上下方向の微小振動を考えよう．“単純支持された”というのは，梁の端が上下に動かないように支えられてはいるが，端点での傾きは自由に変えることができるという意味である(梁はピンのようなもので留められている，図 21.1)．

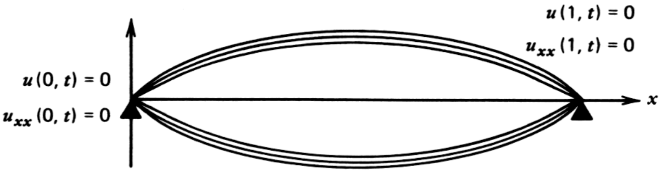


図 21.1 単純支持の梁

この梁の両端の境界条件が

$$u(0,t)=0$$
$$u(1,t)=0$$

でなければならないということは明らかであるが，もう二つの境界条件

$$u_{xx}(0,t)=0$$
$$u_{xx}(1,t)=0$$

もまた両端で成り立つということはそれほど明らかなことではない．細い梁の理論を使うと（参考書の 1 を見よ），梁の曲げモーメントが u_{xx} に比例すること，そして，単純支持の梁は端点でのモーメントが零にならなければならないということを示すことができる．したがって，図 21.1 の梁の振動は，初期値・境界値問題

$$
\begin{aligned}
&\text{偏微分方程式} \quad u_{tt}=-u_{xxxx} \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)\\
&\text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u_{xx}(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \\ u_{xx}(1,t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty)\\
&\text{初期条件} \quad \begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)
\end{aligned}
\tag{21.2}
$$

で表すことができる（簡単のため α を1に等しいとしてある）．この問題を解くために，変数分離法を使って任意の周期解，すなわち

(21.3) $$u(x,t)=X(x)[A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)]$$

という形の振動を探そう．(21.3) の形の解を選ぶということは，本質的には，変数分離法の分離定数を負に選んだということであるということに注意せよ．

式 (21.3) を梁の方程式に代入して $X(x)$ についての常微分方程式

$$X^{(\mathrm{iv})}-\omega^2X=0$$

を得る．この一般解は

$$X(x)=C\cos\sqrt{\omega}x+D\sin\sqrt{\omega}x+E\cosh\sqrt{\omega}x+F\sinh\sqrt{\omega}x$$

である．定数 C, D, E, F を求めるためこの式を境界条件に代入すると，

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t)=0 \Rightarrow X(0)T(t)=0 \Rightarrow X(0)=0 \Rightarrow C+E=0 \\ u_{xx}(0,t)=0 \Rightarrow X''(0)T(t)=0 \Rightarrow X''(0)=0 \Rightarrow -C+E=0 \end{array}\right\}\Rightarrow C=E=0$$

$$u(1,t)=0 \Rightarrow D\sin\sqrt{\omega}+F\sinh\sqrt{\omega}=0$$

$$u_{xx}(1,t)=0 \Rightarrow -D\sin\sqrt{\omega}+F\sinh\sqrt{\omega}=0$$

となる．この最後の二つの式から

$$F\sinh\sqrt{\omega}=0$$

$$D\sin\sqrt{\omega}=0$$

となり，これより，結論

$$F=0$$

$$\sin\sqrt{\omega}=0 \Rightarrow \omega=(n\pi)^2 \quad n=1,2,\cdots$$

が得られる．いいかえれば，単純支持の梁の**自然周波数**は

$$\omega_n=(n\pi)^2$$

であり，**基本解** u_n（偏微分方程式と境界条件の解）は

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=[a_n\sin(n\pi)^2t+b_n\cos(n\pi)^2t]\sin(n\pi x)$$

である．ところで，偏微分方程式と境界条件は線形同次であるから，その和

(21.4)★ $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\sin(n\pi)^2t+b_n\cos(n\pi)^2t]\sin(n\pi x)$$

もまた，偏微分方程式と境界条件を満たす．したがって，あと残っていることは，定数 a_n と b_n を初期条件を満たすように選ぶことである．式 (21.4) を初期条件に代入すると

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

(21.5)

$$u_t(x,0)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 a_n \sin(n\pi x)$$

となる．関数族 $\{\sin(n\pi x)\}$ が区間 $[0,1]$ で直交するという事実を使って，

$$a_n=\frac{2}{(n\pi)^2}\int_0^1 g(x)\sin(n\pi x)dx$$

(21.6)★

$$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx$$

が得られる．したがって，問題の解は (21.4) で与えられ，a_n と b_n は (21.6) で与えられる．

この問題の理解を助けるために，簡単な例を挙げよう．

単振動をする梁

初期条件

$$u(x,0)=\sin(\pi x)+0.5\sin(3\pi x)$$
$$u_t(x,0)=0$$

を満たす単純支持の梁を考えよう（図 21.2)．

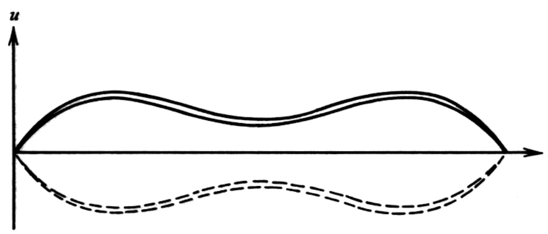


図 21.2　単純支持の梁の単振動

$f(x)$ と $g(x)$ の値を式 (21.6) に代入して解を求めることもできるが，式 (21.5) を眺めて単に視察によって

$$a_n=0 \quad (\text{すべての } n=1,2,\cdots \text{ に対して})$$
$$b_1=1$$
$$b_2=0$$
$$b_3=0.5$$

$$b_n=0 \quad (n=4, 5, \cdots)$$

を求める方が易しそうである．つまり，解は

$$u(x, t)=\cos(\pi^2 t)\sin(\pi x)+0.5\cos(9\pi^2 t)\sin(3\pi x)$$

である．この解が同じ初期条件をもつ弦の振動にどう対応するか調べてみると面白い．第20課を振り返ってみると，弦の振動の問題の解は

$$u(x, t)=\cos(\pi t)\sin(\pi x)+0.5\cos(3\pi t)\sin(3\pi x)$$

で与えられる．つまり，梁の振動は弦の振動より周波数の比が大きい．それぞれの振動がどんな形をしているか想像してみると面白いであろう．しかし，両方とも高い方の周波数が基本周波数の整数倍になっていることに注意せよ．

注意

1. 梁の端の支持し方には一般に次の3通りがある：
   (a)　自由端（留めてない）
   (b)　単純支持
   (c)　剛支持
   これらの境界条件を模式的に図 21.3 に示してある．
2. もう一つ別の大切な梁の振動の問題は，図 21.3 に示すような片持ち梁の問題である．この梁の振動の解は普通の sin と cos の積の和ではなく，境界条件

$$u(0, t)=0$$
$$u_x(0, t)=0$$
$$u_{xx}(1, t)=0$$
$$u_{xxx}(1, t)=0$$

   が標準的なものでないため，それだけ複雑な解

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)[a_n\sin(\omega_n t)+b_n\cos(\omega_n t)]$$

   になる．ここで，固有関数（振動の基本型）は sin, cos, sinh, cosh の線形結合で与えられる．この問題の解は文献表中の参考書3の中にある．

練習問題

1. 片持ち梁の問題

   偏微分方程式　$u_{tt}+u_{xxxx}=0 \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$

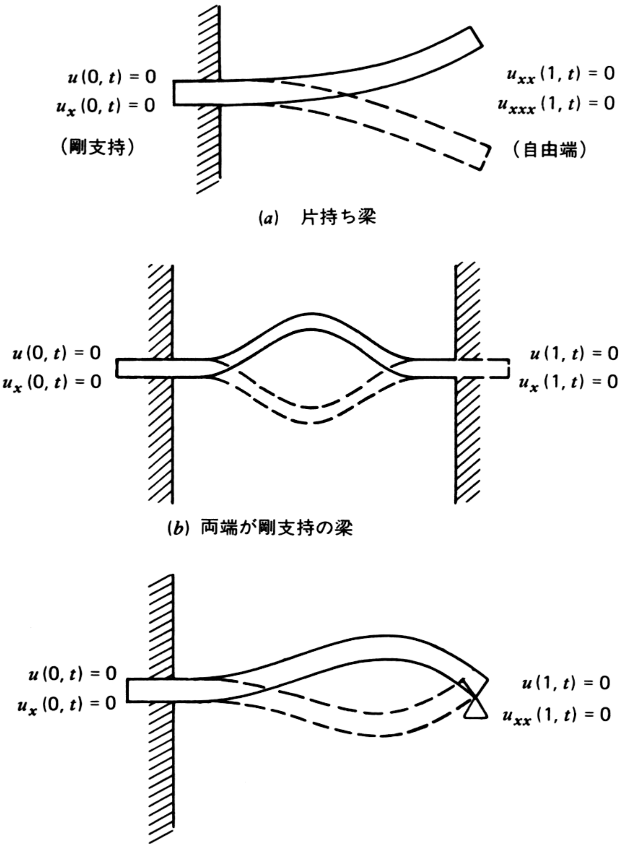


図 21.3a～21.3c　典型的な梁の問題

境界条件
$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u_x(0,t)=0 \\ u_{xx}(1,t)=0 \\ u_{xxx}(1,t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty)$$

初期条件
$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

を解け.

ヒント　この問題の固有関数 $X_n(x)$ は普通の正弦関数ではないが, やはり, Sturm–

Liouville 流の理論を使って，固有関数が $[0,1]$ において直交するということができる

2. 初期条件

$$u(x,0)=\sin(\pi x)$$
$$u_t(x,0)=\sin(\pi x) \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

をもつ（両端共）単純支持の梁に対する解は何か．

3. 初期条件

$$u(x,0)=1-x^2$$
$$u_t(x,0)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

をもつ単純支持の梁の問題の解は何か．

4. 梁の左端（$x=0$）が壁に剛支持され，右端（$x=1$）は図 21.3 に示すような境界条件に従って単純支持されているとする．これらの境界条件をもつ梁の問題を解き，この梁の**振動の自然周波数**の求め方を述べよ．自然周波数と同じ周波数をもついろいろな種類の入力は共振を引き起こすことがありうるから，梁の自然周波数を知ることは大切である．

参考書

1. R. L. Street, *Analysis and Solution of PDE*, Brooks/Cole, 1973. 第5章には梁の振動の問題の導き方が含まれている．
2. J. W. Dettman, *Mathematical Methods in Physics and Engineering*, McGraw-Hill, 1962. この本には Sturm–Liouville 問題に関して多くの頁を割いた節がある．
3. C. R. Wylie, *Advanced Mathematics for Engineers*, McGraw-Hill, 1961. この本には片持ち梁の問題の解法が書いてある．

第22課　問題の無次元化

目的：　境界値問題，初期値問題，その他の型の物理モデルを無次元形に書く書き方を示すこと．無次元形というのは，元の問題の変数を新しい無次元の変数（単位なし）で置き変えたものである．

問題を無次元形に書くことによって，元来異なった形をしている物理学，化学，生物学，経済学等における具体的な方程式が同一のものになる．偏微分方程式を数学的に研究するとき，一般に，方程式の中の物理パラメータに関心をもたないのはこのためである．方程式をこの本で取り扱われている形に変換する仕事は，化学者，物理学者，生物学者などその方程式を立てた人の責任である．

次元解析の背後にある基本的な考え方は，新しい（無次元の）変数を導入することにより，問題を純粋に数学的なものとし，元来その問題を特徴づけていた物理定数を一切含まない形にしようとすることにある．そのようにして，物理パラメータというものを通して特別なニュアンスをもっていた物理学，生物学，工学，化学等の多種多様な方程式を皆同一の簡単な形に変換するというも

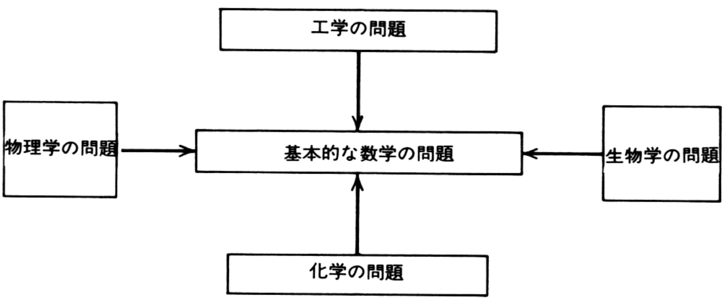


図 22.1　いくつもの問題が同一の基本的な無次元形に変換される

のである（図 22.1）．この無次元化の操作を簡単な具体例を用いて考察しよう．

拡散問題の無次元化

初期温度は $u(x,0)=\sin(\pi x/L)$ であるが，その直後から境界温度を，それぞれ，T_1, T_2 に上げるという初期値・境界値問題，すなわち

$$
(22.1)\qquad
\begin{array}{lll}
\text{偏微分方程式} & u_t=\alpha^2 u_{xx} & (0<x<L,\ 0<t<\infty) \\
\text{境界条件} & \begin{cases} u(0,t)=T_1 \\ u(L,t)=T_2 \end{cases} & (0<t<\infty) \\
\text{初期条件} & u(x,0)=\sin(\pi x/L) & (0\leqslant x\leqslant L)
\end{array}
$$

から始めよう．図 22.2 を見よ．

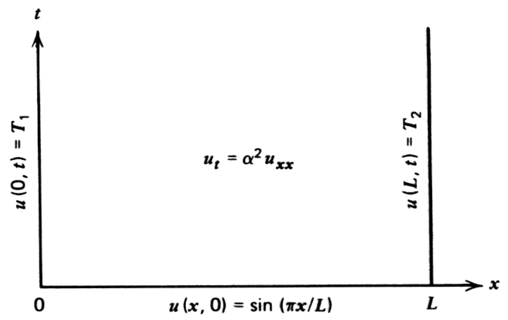


図 22.2　熱流問題の変数の範囲

われわれの目標は問題（22.1）を次のような性質をもつ新しい等価な形に変えることである：

1. 物理パラメータ（αのような）は新しい方程式の中には含まれない．
2. 初期条件と境界条件がより簡単である．

こうするために，u, x, t の代りに，それぞれ，U, ξ, τ という三つの新しい変数を導入しよう．

$$u \longrightarrow U \quad \text{（無次元の温度）}$$
$$x \longrightarrow \xi \quad \text{（無次元の長さ）}$$
$$t \longrightarrow \tau \quad \text{（無次元の時間）}$$

簡単のためこれら三つの変換を一つずつ実行しよう．

従属変数の変換 $u \to U$

$U(x,t)$ を

$$U(x,t)=\frac{u(x,t)-T_1}{T_2-T_1}$$

で定義する．℃ を ℃ で割っているから，この新しい温度 $U(x,t)$ が単位をもたないことは明らかである．またなぜ $U(x,t)$ を選ぶのかも明らかである．$x=0$ と $x=L$ における $U(x,t)$ の新しい境界条件が $U(0,t)=0$ と $U(L,t)=1$ になるということもわかる．実際，変換された新しい $U(x,t)$ に対する問題を調べてみよう．ちょっと計算してみるだけで，元の問題 (22.1) が

$$\text{(22.2)}\quad \begin{aligned} &\text{偏微分方程式}\quad U_t=\alpha^2 U_{xx} \quad (0<x<L,\ 0<t<\infty)\\ &\text{境界条件}\quad \begin{cases} U(0,t)=0 \\ U(L,t)=1 \end{cases} \quad (0<t<\infty)\\ &\text{初期条件}\quad U(x,0)=\frac{\sin(\pi x/L)-T_1}{T_2-T_1} \quad (0\leqslant x\leqslant L) \end{aligned}$$

という問題に変換されたことがわかる．

もしそうしたければここでやめて，$U(x,t)$ の解を求め，それから式

$$u(x,t)=T_1+(T_2-T_1)U(x,t)$$

によって $u(x,t)$ を定めることもできる．しかし，ここでは，さらに続けて，独立変数 x と t の変換をすることにしよう．まず，空間変数 x を変換する．

空間変数の変換 $x \to \xi$

無次元の空間変数 ξ の選び方は明らかであろう．$0\leqslant x\leqslant L$ であるから

$$\xi=x/L$$

とする．導関数

$$U_x=U_\xi \xi_x=\frac{1}{L}U_\xi$$

$$U_{xx}=\frac{1}{L^2}U_{\xi\xi}$$

を計算すれば，明らかに，次に現れる問題 (U,ξ,t に関する) は

$$\text{(22.3)}\quad \begin{aligned} &\text{偏微分方程式}\quad U_t=(\alpha/L)^2 U_{\xi\xi} \quad (0<\xi<1,\ 0<t<\infty)\\ &\text{境界条件}\quad \begin{cases} U(0,t)=0 \\ U(1,t)=1 \end{cases} \quad (0<t<\infty) \end{aligned}$$

初期条件 $U(\xi, 0)=\dfrac{\sin(\pi\xi)-T_1}{T_2-T_1}$ $(0\leqslant\xi\leqslant1)$

となる．

これで目標の 2/3 のところまできた．最後のステップは無次元の時間 τ を導入し，定数 $(\alpha/L)^2$ を微分方程式から消し去ることである．

時間変数の変換 $t\to\tau$

新しい無次元の時間の導入し方は前の二つの変数の選び方のようには明らかでない．しかし，我々の目標は偏微分方程式から定数 $(\alpha/L)^2$ を消去することであるから，次のように進もう：

1. c を未知定数として，$\tau=ct$ という形の変換をしてみる．
2. $u_t=u_\tau\tau_t=cu_\tau$ を計算する．
3. この導関数を偏微分方程式に代入すると

$$cu_\tau=(\alpha/L)^2u_{\xi\xi}$$

を得る．そこで $c=(\alpha/L)^2$ とおく．したがって，新しい時間を

$$\tau=(\alpha/L)^2t$$

とする．

前の問題 (22.3) にこの変換を適用すると完全に無次元化された問題（U, ξ, τ に関する）が得られる：

$$\text{(22.4)}\quad \begin{array}{ll} \text{偏微分方程式} & U_\tau=U_{\xi\xi} \quad (0<\xi<1,\ 0<\tau<\infty) \\ \text{境界条件} & \begin{cases} U(0,\tau)=0 \\ U(1,\tau)=1 \end{cases} \quad (0<\tau<\infty) \\ \text{初期条件} & U(\xi,0)=\phi(\xi) \quad (0\leqslant\xi\leqslant1) \end{array}$$

ここで $\phi(\xi)=\dfrac{\sin(\pi\xi)-T_1}{T_2-T_1}$ である．

この新しい無次元化された問題は次の性質をもつ：

1. 偏微分方程式の中に物理パラメータは含まれない．
2. 境界条件が簡単である．
3. 初期条件は本質的には変っていない．
4. 問題は元の問題より簡単でまとまっている．

この問題に帰着される多くの問題の解は一挙に求めることができる．したがって，科学者が各自の元の問題 (22.1) をこのような無次元化された問題 (22.4)

に変換し，どこかの教科書や学術雑誌の中から答え $U(\xi,\tau)$ を見いだせば，単に

$$u(x,t)=T_1+(T_2-T_1)U\left(\frac{x}{L},\frac{\alpha^2 t}{L^2}\right)$$

という計算をするだけで元の問題 (22.1) の解 $u(x,t)$ を求めることができる．問題を無次元化する話はこれで終わる．新しい変数の定義し方については定った規則といったようなものはない．どんな場合にも，物理的直観を使っていろいろな可能性を確かめてみることが結局は必要である．

この課を終わるに当たって，無次元化のやり方，新しい問題の解き方，そして元の実験室座標系への戻し方の簡単な一例を挙げよう．

双曲型問題の無次元化の例

弦の振動の問題

(22.5)

偏微分方程式　$u_{tt}=\alpha^2 u_{xx}$　$(0<x<L,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=\sin(\pi x/L)+0.5\sin(3\pi x/L) \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$　$(0\leqslant x\leqslant L)$

を考えよう．独立変数を新しい変数

$$\xi=x/L,\qquad \tau=(\alpha/L)t$$

に変換して（u を変換する必要はない），新しい問題

(22.6)

偏微分方程式　$u_{\tau\tau}=u_{\xi\xi}$　$(0<\xi<1,\ 0<\tau<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,\tau)=0 \\ u(1,\tau)=0 \end{cases}$　$(0<\tau<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(\xi,0)=\sin(\pi\xi)+0.5\sin(3\pi\xi) \\ u_\tau(\xi,0)=0 \end{cases}$　$(0\leqslant\xi\leqslant 1)$

が得られる．その解は

$$u(\xi,\tau)=\cos(\pi\tau)\sin(\pi\xi)+0.5\cos(3\pi\tau)\sin(3\pi\xi)$$

である．元の座標系 x と t に変換し直すと，元の問題 (22.5) の解

$$u(x,t)=\cos(\pi\alpha t/L)\sin(\pi x/L)+0.5\cos(3\pi\alpha t/L)\sin(3\pi x/L)$$

が得られる．

注意

1. 次元解析は数値解析において特に重要である．たいていの計算機プログラムは一般的な形で書かれていて多くの物理パラメータを含んだ問題が解けるわけではない．これらのプログラムを使う人は，まず自分の問題をこのようなプログラムが受け入れてくれる形に変換し，変換された問題を解き，そして得られた結果の数値を自分の座標系に変換し直さなければならないのである．
2. 次元解析のおかげで，数学者たちは数学的解析には本質的でない多くのパラメータや定数に煩わされずに偏微分方程式の研究をすることができるようになる．
3. いつでもすべての変数を無次元化する必要があるわけではない．一つか二つだけ変換すれば済むこともある．

練習問題

1. 弦の振動の問題（22.5）を，変換

$$\xi=x/L, \qquad \tau=(\alpha/L)t$$

によって無次元化せよ．

2. 問題

偏微分方程式　$u_t=\alpha^2 u_{xx}$　$(0<x<L,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=T_1 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=T_2$　$(0\leqslant x\leqslant L)$

を無次元化せよ．

3. 変数変換

$$U(x,t)=\frac{u(x,t)-T_1}{T_2-T_1}$$

により問題（22.1）を（22.2）に変換せよ．

4. 新しい時間変数 $\tau=\alpha t$ が波動方程式

$$u_{tt}=\alpha^2 u_{xx}$$

のパラメータ α^2 をなぜ消去するのか，その物理的理由を考えてみよ．α は波の速度とどういう関係をもっているか思い出してみよ．このように，最も望ましい座標系を見いだす際に直観が主たる役割を演じる．

5. 方程式

$$u_t + vu_x = 0$$

の v を消去するような新しい空間変数 ξ の選び方を示せ.

参考書

H. L. Langhaar, *Dimensional Analysis and Theory of Models*, John Wiley & Sons, 1951. この課で論じたよりもっと多くのいろいろな面から次元解析について論じている良く書かれた本である.

第23課　偏微分方程式の分類 (双曲型方程式の標準形)

目的：　二つの独立変数をもつ線形２階偏微分方程式

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$$

（A, B, C, D, E, F, G は x, y の関数である；定数のこともありうる）が

1. 双曲型（$B^2-4AC>0$ のとき）
2. 放物型（$B^2-4AC=0$ のとき）
3. 楕円型（$B^2-4AC<0$ のとき）

に分類されることを示し，（x と y の代りに）新しい座標 $\xi=\xi(x,y)$ と $\eta=\eta(x,y)$ を導入して方程式を簡単化する方法を示すこと．この偏微分方程式を新しい座標 ξ と η で書くと，（それぞれ，B^2-4AC が正か，零か，負かに従って）三つの標準形

1. $\begin{cases} u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}=\Psi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \\ u_{\xi\eta}=\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \end{cases}$　（双曲型方程式の二つの標準形）
2. $u_{\eta\eta}=\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$　（放物型方程式の標準形）
3. $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$　（楕円型方程式の標準形）

の中の一つになる．ここで，Φ と Ψ は１次導関数 u_ξ, u_η，従属変数 u，新しい独立変数 ξ, η の関数である．もちろん，Φ や Ψ の正確な形は元の方程式に依存して定まる．

偏微分方程式の分類を取り扱う章は本の最初に置くべきだと読者は無造作に考えるかもしれない．これは多分その通りであって，多くの本ではその話題が最初に置かれている．しかし，また同時に，たいていの学生は見たことも聞いたこともないことを学ぶのにあまり気乗りがしないのも事実である．そのためわれわれは偏微分方程式の分類の話に入るのを今まで待っていたのである．

本課の目的は，偏微分方程式

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G \tag{23.1}$$

（A, B, C, D, E, F, G は，一般に，x と y の関数である）を

1. $B^2(x_0, y_0)-4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0)>0$ なら，点 (x_0, y_0) において双曲型
2. $B^2(x_0, y_0)-4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0)=0$ なら，点 (x_0, y_0) において放物型
3. $B^2(x_0, y_0)-4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0)<0$ なら，点 (x_0, y_0) において楕円型

であると**分類**し，**さらに**それぞれの場合に対応する標準形（簡単な形）に方程式を変換することである．読者が分類の大要を理解できるように，双曲型，放物型，楕円型方程式の四つの例をまず挙げよう．

双曲型，放物型，楕円型方程式の例*

1. 熱伝導方程式 $u_t=u_{xx}$ は (23.1) の形の**線形2階**方程式で，その係数は

$$A=1,\ B=0,\ C=0,\ D=0,\ E=-1,\ F=0,\ G=0$$

である．したがって，すべての x と t に対して $B^2-4AC=0$ である．したがって，方程式はすべての x と t に対して**放物型**である．このとき，時間変数を上記の一般形の方程式の y に対応させていることに注意せよ．実際には，熱伝導方程式の x を一般式の y に対応させ，時間変数 t を一般式の x に対応させても同じ結果が得られたであろう．

2. 波動方程式 $u_{tt}=u_{xx}$ もまた (23.1) の形をしており，その係数は

$$A=1,\ B=0,\ C=-1,\ D=E=F=G=0$$

である．したがって，すべての x と t に対して $B^2-4AC=4$ であり，方程式はすべての x と t に対して**双曲型**である．

3. Laplace の方程式 $u_{xx}+u_{yy}=0$ は，$B^2-4AC=-4<0$ であるから，すべての x と y に対して**楕円型**である．

4. 変数係数の線形方程式 $xu_{xx}+u_{yy}=\sin x$ も (23.1) の形をしているが，$B^2-4AC=-4x$ であるから方程式は

$x>0$ なら楕円型

$x=0$ なら放物型

$x<0$ なら双曲型

---

* ここの例はもっと一般的な放物型，双曲型，楕円型方程式の原型であって，これらの例の挙動は各型の一般的な方程式の特徴も与えているということも指摘しておかなければならない．

である．この例は，変数係数の方程式が変域の場所場所で形を変えうることを表している．

読者は，また，式 (23.1) が双曲型であるか，放物型であるか，楕円型であるかは2次導関数の係数だけに関係していて，1次導関数の項，u の項，非同次項には関係しないということに注意しなくてはならない．

さて，この課の主要部分——双曲型方程式を標準形に書き変えること——に入ろう．方程式が（ある与えられた空間領域で）双曲型であるなら，元の x と y の代りに新しい座標 ξ と η（特性座標系）を導入して方程式を簡単な形

$$u_{\xi\eta}=\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \tag{23.2}$$

にすることが可能だということがわかる．この式は2次導関数 $u_{\xi\eta}$ を1個だけ含み，一方，関数 $\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$ は新しい独立変数 ξ, η, 従属変数 u, 1次導関数 u_ξ, u_η の関数である．もちろん，関数 Φ の正確な形は元の方程式に依存する．新しい座標 ξ,η と Φ の正確な形とを求めるのがこの課の目的である．

双曲型方程式の標準形

われわれが問題としている変域の部分において $B^2-4AC>0$ を満たすような，一般形の偏微分方程式

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G \tag{23.3}$$

から始めよう．ここでの目的は，新しい座標

$$\xi=\xi(x,y)$$
$$\eta=\eta(x,y)$$

を導入して，上の偏微分方程式が2次微分 $u_{\xi\eta}$ を1個だけ含むように変換することである（このやり方で双曲型方程式を楕円型あるいは放物型標準形に変換しようとしてもうまくいかないこともわかる）．

まず，偏導関数を計算する：

$$\begin{aligned}
u_x&=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x\\
u_y&=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y\\
u_{xx}&=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}\\
u_{xy}&=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}\\
u_{yy}&=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}
\end{aligned} \tag{23.4}$$

これらの式を元の方程式 (23.3) に代入すると

$$\bar{A}u_{\xi\xi}+\bar{B}u_{\xi\eta}+\bar{C}u_{\eta\eta}+\bar{D}u_{\xi}+\bar{E}u_{\eta}+\bar{F}u=\bar{G} \tag{23.5}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
\bar{A}&=A\xi_x{}^2+B\xi_x\xi_y+C\xi_y{}^2\\
\bar{B}&=2A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+2C\xi_y\eta_y\\
\bar{C}&=A\eta_x{}^2+B\eta_x\eta_y+C\eta_y{}^2\\
\bar{D}&=A\xi_{xx}+B\xi_{xy}+C\xi_{yy}+D\xi_x+E\xi_y\\
\bar{E}&=A\eta_{xx}+B\eta_{xy}+C\eta_{yy}+D\eta_x+E\eta_y\\
\bar{F}&=F\\
\bar{G}&=G
\end{aligned} \tag{23.6}$$

である．この計算は，数学的には単純なものであるが，全く煩わしい．読者はこの課の終わりにある練習問題の中でこのような計算をする機会を得るであろう．

次のステップは式 (23.5) の係数 $\bar{A}$ と $\bar{C}$ を零に等しいと置いて，変換 $\xi=\xi(x,y)$，$\eta=\eta(x,y)$ を決定することである．こうして，元の偏微分方程式を標準形に変える座標が得られる．そこで

$$\bar{A}=A\xi_x{}^2+B\xi_x\xi_y+C\xi_y{}^2=0$$
$$\bar{C}=A\eta_x{}^2+B\eta_x\eta_y+C\eta_y{}^2=0$$

と置いて，この二つの式を書き変えて

$$A[\xi_x/\xi_y]^2+B[\xi_x/\xi_y]+C=0$$
$$A[\eta_x/\eta_y]^2+B[\eta_x/\eta_y]+C=0$$

とする．この式を $[\xi_x/\xi_y]$ と $[\eta_x/\eta_y]$ について解くと

$$\begin{aligned}
[\xi_x/\xi_y]&=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\\
[\eta_x/\eta_y]&=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}
\end{aligned} \quad \text{（特性方程式）} \tag{23.7}$$

が得られる．$[\xi_x/\xi_y]$ と $[\eta_x/\eta_y]$ はいずれもが2次方程式の二つの解をもつ．しかし，$\bar{A}$ と $\bar{C}$ を零にするにはそれぞれの式の解を1個求めるだけでよいことに注意せよ．ただし，同じ根を採用しないようにしなければならない．同じ根を採用すると，二つの座標が同じになってしまう．

結局，われわれの問題は比 $[\xi_x/\xi_y]$, $[\eta_x/\eta_y]$ が式 (23.7) を満足するように二つの関数 $\xi(x,y)$，$\eta(x,\eta)$ を定めることに帰着された．図 23.1 を一寸眺めてみれば容易にこれらの条件を満たす関数を求めることができるであろう．

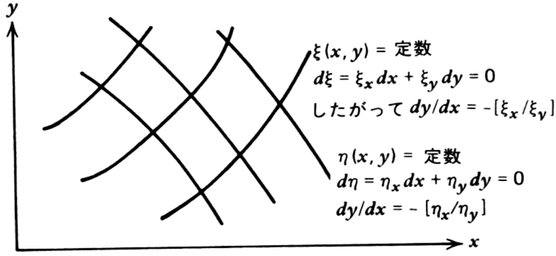


図 23.1　特性曲線 $\xi(x, y)=c$ および $\eta(x, y)=c$

この図から ξ と η をどう求めるかを理解するため，例として簡単な方程式

$$u_{xx}-4u_{yy}+u_x=0, \qquad B^2-4AC=16>0$$

を取り上げよう．この特性方程式は

★
$$\frac{dy}{dx}=-[\xi_x/\xi_y]=\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=-2$$
$$\frac{dy}{dx}=-[\eta_x/\eta_y]=\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=2$$

である．ξ と η を求めるため，まず（積分によって）y を定め，

$$y=-2x+c_1$$
$$y=2x+c_2$$

を得る．ξ と η を求めるには，定数 c_1 と c_2 を x, y の関数として表せばよい．すなわち，c_1 と c_2 を式の右辺に残し他をすべて左辺に移す．左辺にある x と y の関数が ξ と η である．すなわち，

$$\xi=y+2x=c_1$$
$$\eta=y-2x=c_2$$

である．関数 ξ と η が上の特性方程式を満たすことは明らかである．この特別な新しい座標を図 23.2 に描いてある．これで新しい座標の求め方についての話は終わりにして，最後の新しい方程式を求めるステップに進もう．

この最後の部分は非常に易しい．すなわち，標準方程式を求めるためには，新しい座標 $\xi(x, y)$，$\eta(x, y)$ を取ってそれを方程式

$$\bar{A}u_{\xi\xi}+\bar{B}u_{\xi\eta}+\bar{C}u_{\eta\eta}+\bar{D}u_{\xi}+\bar{E}u_{\eta}+\bar{F}u=\bar{G}$$

に代入しさえすればよい．ここで，$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ は (23.6) により与えられる．

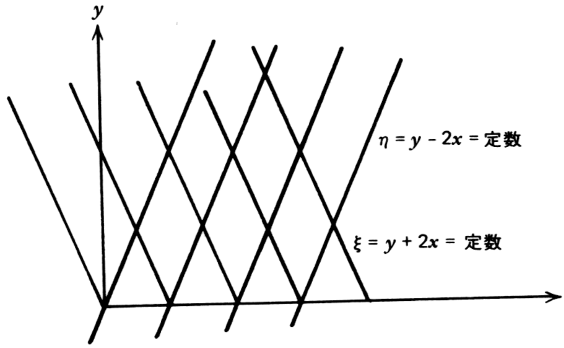


図 23.2 $u_{xx}-4u_{yy}+u_x=0$ に対する新しい特性座標

この課を終わる前に，上で説明した一般的な手順が具体的な例にどのように適用されるかを見よう．

双曲型方程式 $y^2u_{xx}-x^2u_{yy}=0$ を標準形に書き変えること

始めに，方程式

$$y^2u_{xx}-x^2u_{yy}=0 \quad (x>0,\ y>0)$$

が与えられたとする．これは考えている領域第1象限において双曲型の方程式である．第1象限の x, y に関して元の方程式を標準形に変えるような新しい座標を求める問題を考えよう．

〈ステップ 1〉　二つの特性方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=-\frac{x}{y}$$

（このステップは $\bar{A}=\bar{C}=0$ と置くことに等しいことを思い出せ）

を解く．この二つの式を常微分方程式の変数分離法により積分すると，次のような陰関数の式が得られる（ここで x の陽な形の関数として y を表すことはできない）：

$$y^2-x^2=\text{定数}$$

$$y^2+x^2=\text{定数}$$

したがって，新しい座標 ξ と η は

$$\xi=y^2-x^2$$

$$\eta=y^2+x^2$$

である．図 23.3 にこの二つの新しい座標が描いてある．

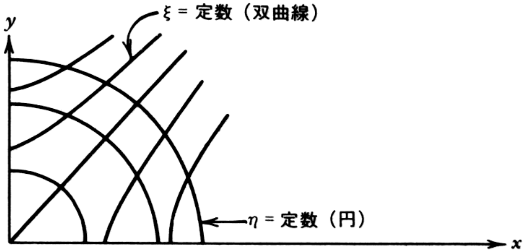


図 23.3　新しい特性座標

新しい座標がこれで得られた．新しい方程式を求めるため

$\bar{A}=0$　（これを零に等しいと置いて ξ と η を定めたのであるから，こうなるのは当然である）

$\bar{B}=2A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+2C\xi_y\eta_y=-16x^2y^2$

$\bar{C}=0$　（これを零に等しいと置いたのであるから，こうなるのは当然である）

$\bar{D}=A\xi_{xx}+B\xi_{xy}+C\xi_{yy}+D\xi_x+E\xi_y=-2(x^2+y^2)$

$\bar{E}=A\eta_{xx}+B\eta_{xy}+C\eta_{yy}+D\eta_x+E\eta_y=2(y^2-x^2)$

$\bar{F}=F=0$

$\bar{G}=G=0$

を計算し，これらを式

$$\bar{A}u_{\xi\xi}+\bar{B}u_{\xi\eta}+\bar{C}u_{\eta\eta}+\bar{D}u_\xi+\bar{E}u_\eta+\bar{F}u=\bar{G}$$

に代入すると

$$u_{\xi\eta}=\frac{-(x^2+y^2)u_\xi+(y^2-x^2)u_\eta}{8x^2y^2}$$

が得られる．

〈ステップ 2〉　最後に，x, y を ξ, η で表すと

(23.8)
$$u_{\xi\eta}=\frac{\eta u_\xi-\xi u_\eta}{2(\xi^2-\eta^2)}$$

が得られる．これが最終結果である．新しい座標と新しい方程式の求め方がこれでわかった．

注意

1. 一般の双曲型方程式には標準形が二つある．上で扱った以外のもう一つの形は，さらに変換

$$\alpha=\alpha(\xi,\eta)=\xi+\eta$$
$$\beta=\beta(\xi,\eta)=\xi-\eta$$

を行い，上で扱った第1標準形を α，β を使って書き直すことによって求めることができる．式 (23.8) に対してこの変換を行うと

$$u_\xi=u_\alpha\alpha_\xi+u_\beta\beta_\xi=u_\alpha+u_\beta$$
$$u_\eta=u_\alpha\alpha_\eta+u_\beta\beta_\eta=u_\alpha-u_\beta$$
$$u_{\xi\eta}=u_{\alpha\alpha}\alpha_\eta+u_{\alpha\beta}\beta_\eta+u_{\beta\alpha}\alpha_\eta+u_{\beta\beta}\beta_\eta=u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}$$

となるから，これより

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=\frac{-\beta u_\alpha+\alpha u_\beta}{2\alpha\beta} \tag{23.9}$$

が得られる．必要なら α, β を元の x, y で表すこともできる；すなわち

$$\alpha=\xi+\eta=(y^2-x^2)+(y^2+x^2)=2y^2$$
$$\beta=\xi-\eta=(y^2-x^2)-(y^2+x^2)=-2x^2$$

2. 次のような疑問があるかもしれない．偏微分方程式を分類したり標準形に変換したりするのはなぜか．

（a）　線形偏微分方程式を双曲型，放物型，楕円型の三つの主要な型に分類することは，本質的には，物理の問題を三つの基本的な型――すなわち，波の伝播，拡散，定常状態の3種の問題――に物理的に分類することに対応している．これら三つの型の方程式の数学的解は全く性質を異にしている．

（b）　双曲型の問題の解の性質の理論的研究では，普通，方程式は標準形で書かれていると仮定している．すなわち，研究すべき方程式は

$$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}=\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

という形をしていると仮定している．われわれがある方程式を与えられてその解の性質を調べようというときには，まずそれを標準形に変換し，それからすでに知られている諸結果を利用すべきである．

（c）　標準形の双曲型方程式の数値解を計算する計算機のプログラムはた

くさん書かれている．関数 $\Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ をサブルーチーンの形で計算機に入れてやるようになっているから，計算を始める前に，まず偏微分方程式を標準形に変換する必要がある．新しい座標で表された解が求められた後に，それを元の座標に変換し直すことは常に可能である．

練習問題

1. 次の偏微分方程式が双曲型か，放物型か，楕円型かを述べよ：
   (a)　$u_{xx}-u_{xy}=0$
   (b)　$u_{tt}=u_{xx}+u_x+hu$
   (c)　$u_{xx}+3u_{yy}=\sin x$
   (d)　$u_{xx}+u_{yy}=f(x, y)$
   (e)　$u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=f(r, \theta)$
2. この課の式 (23.4)，(23.5)，(23.6) を証明せよ．
3. 方程式
$$3u_{xx}+7u_{xy}+2u_{yy}=0$$
がすべての x と y について双曲型であることを証明し，新しい特性座標を求めよ．
4. 練習問題3を続けて，新しい標準方程式
$$u_{\xi\eta}=\Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$
を求めよ．
5. 練習問題4を続けて，別の標準形
$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=\Psi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$
を求めよ．
6. $$u_{xx}+4u_{yy}=0$$
の新しい特性座標を求めよ．新しい座標系に変換した方程式を解き，次に，元の座標系に変換し直すことにより元の問題の解を求めよ．

第24課　2次元と3次元の波動方程式（自由空間）

目的：　3次元の初期値問題

偏微分方程式　$u_{tt}=c^2[u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}]$

$(-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty,\ -\infty<z<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,y,z,0)=\phi(x,y,z) \\ u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z) \end{cases}$

を解き，この解が Huygens（ホイヘンス）の原理を満足することを示すこと．次に，次元降下法を用いて，対応する2次元の問題

偏微分方程式　$u_{tt}=c^2[u_{xx}+u_{yy}]$　$(-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,y,0)=\phi(x,y) \\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y) \end{cases}$

を解く．そして，2次元の解が Huygens の原理を満たさないことを示す．最後に，次元降下法をもう一度使って，この問題の1次元版が D'Alembert 解をもつこと（このことはすでに見た）を示す．

すでに，与えられた初期条件の下での無限に長い弦の振動の話をし，それから D'Alembert 解が出てくることを示した．1次元波動方程式は3次元での平面波を記述するのにも使えるということも知っていてほしい．たとえば，源から十分離れたところにある音波や電磁波は平面波に近いから，この1次元波動方程式によって記述されると見てよい．一般には，

1. 1次元の波は平面波と呼ばれ，
2. 2次元の波は円柱波と呼ばれ，
3. 3次元の波は球面波と呼ばれる．

いいかえれば，1次元波動方程式は高次元の平面波を表すこともあるし，1次

元の弦の振動を表すこともある．この課の問題は D'Alembert 解を2次元と3次元に一般化することである．

3 次元の波

初期条件が与えられているような3次元の波を考えることから始めよう．すなわち，初期値問題

(24.1)
$$\text{偏微分方程式}\quad u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$$
$$(-\infty<x<\infty,\ \ -\infty<y<\infty,\ \ -\infty<z<\infty)$$
$$\text{初期条件}\quad \begin{cases} u(x,y,z,0)=\phi(x,y,z) \\ u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z) \end{cases}$$

を解こう．この問題を解くにはまず，より簡単な問題（$\phi=0$ と置く）

(24.2)
$$\text{偏微分方程式}\quad u_{tt}=c^2\nabla^2 u$$
$$\text{初期条件}\quad \begin{cases} u(x,y,z,0)=0 \\ u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z) \end{cases}$$

を解く．ここで ∇^2 は微分演算子

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である．この問題は Fourier 変換により解くことができる．その解は

(24.3)
$$u(x,y,z,t)=t\bar{\psi}$$

である．ここで，$\bar{\psi}$ は，中心 (x,y,z)，半径 ct の球面上にある初期擾乱 ψ の平均である．すなわち

$$\bar{\psi}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x+ct\sin\varphi\cos\theta,\ y+ct\sin\varphi\sin\theta,\ z+ct\cos\varphi)\sin\varphi\, d\theta d\varphi$$

である．θ と φ が，それぞれ，$[0,2\pi]$ と $[0,\pi]$ の範囲を動くにつれて関数 ψ の引数は球の表面全体を動く（図 24.1）.

この解は，初期擾乱 ψ が各点から（速度 c で）外向きに球面波として広がり，そのため，ある時間がたった後の点 $(x,\ y,\ z)$ にはその周りの球面（半径 ct）上にある初期擾乱の影響が集まっているということを意味している（図 24.2）.

与えられた初期擾乱に対する解 (24.3) の実際の値は計算機で数値的に計算しなければならないことが多いであろう．簡単な二三の関数 ψ についてこの解

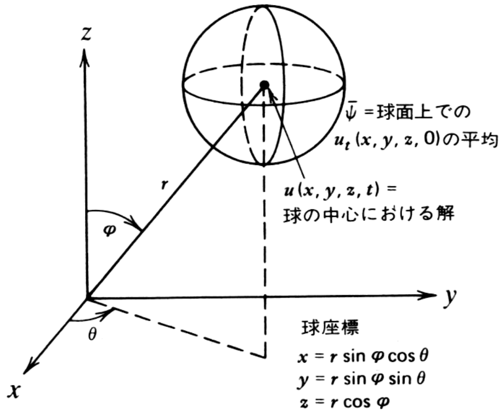


図 24.1 解は球面上の初期擾乱の平均である

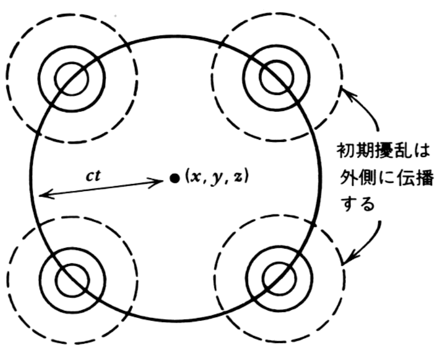


図 24.2 初期擾乱 ψ は各点から外側に伝播する

を実際に計算してみると面白いであろう．

さて，われわれの始めの問題を完成させるには，まだ残っている半分

$$(24.4)\qquad \begin{array}{ll} \text{偏微分方程式} & u_{tt}=c^2\nabla^2 u \quad ((x,y,z)\in R^3) \\ \text{初期条件} & \begin{cases} u=\phi \\ u_t=0 \end{cases} \end{array}$$

を片付けなければならない．これは易しい．つまり，有名な Stokes（ストークス）の定理によれば，この問題を解くには，初期条件を $u=0$, $u_t=\phi$ に変えた問題を解き，その後でその解を時間で微分すればよいことがわかる．すなわち，

(24.5)

$$\text{偏微分方程式}\quad u_{tt}=c^2\nabla^2 u$$

$$\text{初期条件}\quad \begin{cases} u=0 \\ u_t=\phi \end{cases}$$

を解いて $u=t\bar{\phi}$ を得，それからそれを時間で微分する．そうすると，問題 (24.4) の解

$$u=\frac{\partial}{\partial t}[t\bar{\phi}]$$

が得られる．このやり方を1次元波動方程式に対して適用するとどうなるかを調べてみよう．1次元波動方程式のときには (24.5) の解（D'Alembert 解）は

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\phi(s)ds$$

であった．したがって，この式を時間について微分する（Leibniz の法則を使う；練習問題7）と

$$u_t(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)]$$

が得られるが，これは (24.4) の解である．

以上のことがわかれば，一般の3次元の問題

$$\text{偏微分方程式}\quad u_{tt}=c^2\nabla^2 u\quad ((x,y,z)\in R^3)$$

$$\text{初期条件}\quad \begin{cases} u=\phi \\ u_t=\psi \end{cases}$$

の解が得られる．つまり，

$$u(x,y,z,t)=t\bar{\psi}+\frac{\partial}{\partial t}[t\bar{\phi}]$$

が解である．ここで，$\bar{\phi}$ と $\bar{\psi}$ は中心 (x,y,z)，半径 ct の球面上での関数 ϕ と ψ の平均値である．

上の式は，3次元での自由波動方程式に対する Poisson の公式と呼ばれており，D'Alembert の公式の3次元への一般化である．Poisson の公式の一番重要な点は，$\bar{\phi}$ と $\bar{\psi}$ の式の二つの積分が球の表面上での積分になっているとい

う点であって，それに基づいて，次のような解の解釈が可能になる．時刻が $t=t_1$ のとき，(x, y, z) における解 u は，(x, y, z) を中心とする半径 ct_1 の球面上の初期擾乱 ϕ と ψ にしか依存しない（図 24.3）．

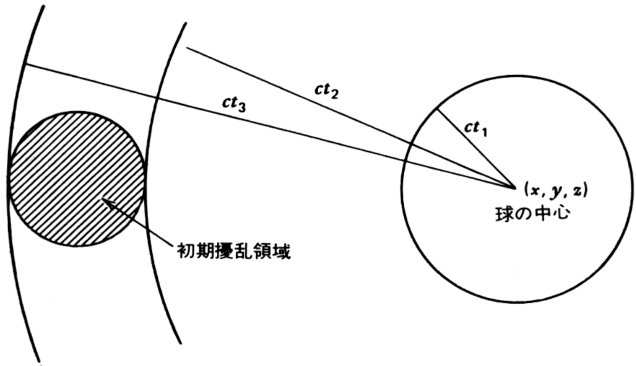


図 24.3 点 (x, y, z) への初期擾乱の影響を示す図

今，初期擾乱 ϕ と ψ が小さな球（図 24.3 を見よ）以外のところでは零であったと仮定しよう．時間がたつにつれ，(x, y, z) を中心とする球の半径は速度 c で増えて行き，t_2 秒後には初期擾乱領域と交わり，$u(x, y, z, t)$ が零でなくなる．$t_2<t<t_3$ の間，球は擾乱領域と交わっているので (x, y, z) での解は零でないが，$t=t_3$ になると (x, y, z) での解は突然また零になる．いいかえれば，初期擾乱領域を震源とする波の擾乱は鋭い後縁をもつ．この一般的な原理は，3次元における **Huygens の原理**と呼ばれている．3次元での音波がわれわれの耳を刺激し，そして波が通りすぎると一瞬のうちに消えてしまうのも，こういう理由からである．何次元であっても波は常に鋭い前縁をもつが，後縁も鋭くなるのは3，5，7次元のときだけであることが知られている．われわれはすでに D'Alembert 解から，1次元の初期擾乱

$$u(x, 0)=\phi(x)$$

$$u_t(x, 0)=\psi(x)$$

が鋭い後縁をもたない（D'Alembert 解は ψ を $(x-ct)$ から $(x+ct)$ までの間で積分するから）ことを知っている．

次に，Huygens の原理が円柱波には当てはまらないことを示そう．このよ

うな事態はある一点から水波が生じるときなどに起きる．このとき，波の後縁は鋭くなく，次第に零に減衰するという性質をもつ．

2 次元の波動方程式

2次元問題

$$
\text{(24.6)}\quad
\begin{array}{ll}
\text{偏微分方程式} & u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}) \quad (-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty) \\
\text{初期条件} & \begin{cases} u(x,y,0)=\phi(x,y) \\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y) \end{cases}
\end{array}
$$

を解くために，3次元問題の初期擾乱 ϕ と ψ が二つの変数 x と y だけに関係するものとしよう．こうすると，u についての3次元の公式

$$
u=t\bar{\psi}+\frac{\partial}{\partial t}[t\bar{\phi}]
$$

は円柱波を表し，したがって2次元問題の解を与える．この方法を**次元降下法**と呼ぶ．計算をすると（かなり本格的な計算であるが）

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t)=&\frac{1}{2\pi c}\int_0^{2\pi}\int_0^{ct}\frac{\psi(r,\theta)}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}rdrd\theta \\
&+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi c}\int_0^{2\pi}\int_0^{ct}\frac{\phi(r,\theta)}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}rdrd\theta\right]
\end{aligned}
$$

となる（(r,θ) は (x,y) を原点と見なしたときの平面極座標）．これが2次元における自由波の方程式の解である．このような式は多分数値的に計算しなければならないであろうが，Huygens の原理による面白い解釈ができる．この解においては，二つの初期条件 ϕ と ψ の積分が，(x,y,z) を中心とする半径 ct の円の内部（内部というところが大切である）全体にわたっていることに注意せよ．つまり，3次元の場合と同じような方法でこの式の意味を解析すると，初期擾乱による波は鋭い前縁をもつが鋭い後縁はもたないということがわかる．このように，Huygens の原理は2次元では成り立たない．

最後に，初期条件 ϕ と ψ が1個の変数にしか関係しないとすると，平面波が生じ，前述の方程式はさらに1だけ次元が下がり，よく知られた D'Alembert 解

$$
u(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds
$$

となる．前と同様，次元降下の実際の計算はそれほど簡単ではない．D'Alembert 解では，初期変位 ϕ は鋭い後縁を引き起こすが，初速 ψ は鋭い後縁を引

き起こさないことに注意せよ．つまり，1次元では，初期位置については Huygens の原理が成り立つが初速については成り立たないというように，少々変わった事態が生じている．そこで，Huygens の原理は1次元では成り立たないとここでは一般的にいっておく．

注意

この課では高次元の積分からより低次元の積分を構成する方法を示さなかったから，次元降下法について詳しく述べたことにはならない．実際の式の計算のし方については参考書2に書いてある．大ざっぱにいうと，高次元空間の問題の解を使って，初期条件，境界条件がある変数に依存しないと仮定することにより，低次元空間の問題の解を求めることができるということである．次元降下法というのはこの課の問題に限らず，もっといろいろな問題に適用できることも知っておいてほしい．

練習問題

1. 1次元においては，

偏微分方程式　$u_{tt}=c^2u_{xx}\quad(-\infty<x<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=\phi(x) \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$

の解は

偏微分方程式　$u_{tt}=c^2u_{xx}\quad(-\infty<x<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=\phi(x) \end{cases}$

の解を t について微分することによって求めることができることを示せ．

2. 練習問題1の結果を適用して

偏微分方程式　$u_{tt}=u_{xx}\quad(-\infty<x<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=x \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$

の解を求めよ．

3. 3次元の問題

偏微分方程式　$u_{tt}=c^2\nabla^2u\quad((x,y,z)\in R^3)$

初期条件　$\begin{cases} u=0 \\ u_t=\begin{cases} 1 & (x^2+y^2+z^2\leqslant 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{cases}$

の球面波の解を図や言葉を用いて説明せよ.

4. (練習問題3と一緒に解け.) 練習問題3と類似の円柱波の問題

偏微分方程式　$u_{tt}=c^2\nabla^2 u \quad ((x, y)\in R^2)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=\begin{cases} 1 & (x^2+y^2\leqslant 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{cases}$

の2次元解を求めよ.

5. (練習問題3と一緒に解け.) 上と類似の平面波の問題

偏微分方程式　$u_{tt}=c^2 u_{xx} \quad (-\infty<x<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=\begin{cases} 1 & (|x|\leqslant 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{cases}$

の1次元解を求めよ.

6. 2次元で Huygens の原理が成り立たないのは何故か. その物理的意味は何か.

7. Leibniz の公式

$$\frac{d}{dt}\int_{f(t)}^{g(t)} F(\xi,t)d\xi=\int_{f(t)}^{g(t)}\frac{\partial F(\xi,t)}{\partial t}d\xi+g'(t)F(g(t),t)-f'(t)F(f(t),t)$$

を使って, 積分

$$\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\phi(s)ds$$

を t に関して微分せよ.

参考書

1. P. Garbedian, *Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1964. Huygens の原理についてよく書いてある. この課よりかなり高度の本である.
2. R. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, MacMillan, 1963. 物理数学の問題に関する優れた参考書である.

第25課　有限 Fourier 変換（正弦変換と余弦変換）

目的：　一つの新しい積分変換（有限正弦変換と有限余弦変換）

$$S_n = S[f] = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)\,dx \qquad \text{（有限正弦変換）}$$

$$C_n = C[f] = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\pi x/L)\,dx \qquad \text{（有限余弦変換）}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(n\pi x/L) \qquad \text{（逆正弦変換）}$$

$$f(x) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\pi x/L) \qquad \text{（逆余弦変換）}$$

を導入し，これらの変換による境界値問題（特に，非同次境界値問題）の解き方を示すこと．これまでにすでに，普通の Fourier 変換と Laplace 変換について学び，偏微分方程式を常微分方程式に変換して問題を解く解き方についても学んだ．普通の Fourier 変換では，変数を $-\infty$ から ∞ までにわたり変換する必要がある．したがって，それは自由空間（境界なし）で問題を解くのに用いられる．この課では，有界な変数を変換することにより境界値問題（境界をもつ）の解法を示す．

まず，動機のことは忘れよう．そして，この変換と逆変換を定義してそれを使うことだけをしよう．少し後で，それが何故役に立つのかの話をしよう．要するに，このような変換の技法は，問題の関数をいろいろな周波数に分解し，問題の全スペクトルを各周波数ごとに計算してその結果を足し合わせることだと考えることができる．

まず，区間 $[0, L]$ で定義された関数 $f(x)$ から始めよう．この関数の有限正弦変換と有限余弦変換は

★有限正弦変換　$S[f]=S_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)\,dx \quad (n=1,2,\cdots)$

★有限余弦変換　$C[f]=C_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos(n\pi x/L)\,dx \quad (n=0,1,\cdots)$

によって定義される．これらの変換が関数を Fourier 正弦係数と Fourier 余弦係数に変換するものにすぎないということにすぐ気が付くであろう．これらの変換の逆変換は Fourier 正弦級数と Fourier 余弦級数である．

★逆正弦変換　$f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(n\pi x/L)$

★逆余弦変換　$f(x)=\dfrac{C_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\pi x/L)$

逆余弦変換の和が $n=0$ から始まり，逆正弦変換が $n=1$ から始まっていることに注意せよ．

正弦変換の例

$$f(x)=1\ \ (0\leqslant x\leqslant 1):S_n=S[1]=2\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx=\begin{cases}0 & (n:偶数)\\ 4/n\pi & (n:奇数)\end{cases}$$

図 25.1 にある $f(x)$ のグラフとその変換のグラフを見よ．

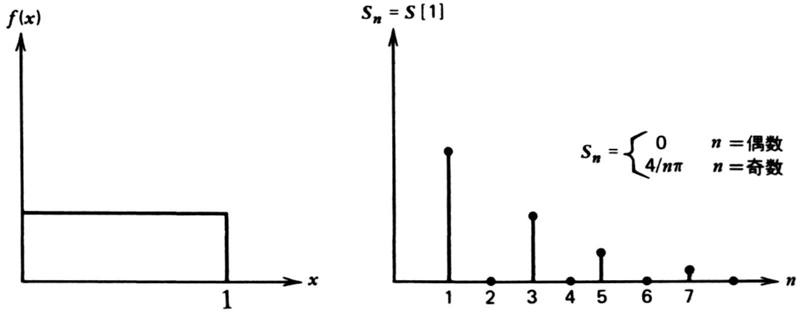


図 25.1　$f(x)=1$ とその変換のグラフ

逆変換は

$$f(x)=1=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n-1}\right]\sin[(2n-1)\pi x]$$

となるであろう．

この関数のグラフは，区間 $[0,1]$ の外側ではどうなるであろうか．それを考えてみよう．また，$f(x)$ の正弦変換は正の整数のところだけで定義されていることにも注意せよ（すなわち，それは数列に他ならない）．つまり，有限正弦変換と有限余弦変換は関数を数列に変換するものである．

変換の性質

いろいろな問題を解く前に，これらの変換がもっている有用な性質をいくつか紹介しよう．

$u(x,t)$ が2変数の関数であるとき，

$$S[u]=S_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin(n\pi x/L)dx$$

$$C[u]=C_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\cos(n\pi x/L)dx$$

である（変数 x について変換していることに注意せよ）．（変数 x を変換したので，結果は時間だけの関数列になっていることに注意せよ．）

導関数の変換はどうなるであろうか．さらに役立つ法則を二三挙げる：

$$S[u_t]=\frac{dS[u]}{dt}\qquad S[u_{tt}]=\frac{d^2S[u]}{dt^2}$$

$$S[u_{xx}]=-[n\pi/L]^2S[u]+\frac{2n\pi}{L^2}[u(0,t)+(-1)^{n+1}u(L,t)]$$

$$C[u_{xx}]=-[n\pi/L]^2C[u]-\frac{2}{L}[u_x(0,t)+(-1)^{n+1}u_x(L,t)]$$

有限変換による問題の解法

有限正弦変換による非同次境界値問題の解

非同次波動方程式

偏微分方程式　$u_{tt}=u_{xx}+\sin(\pi x)\quad(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases}u(0,t)=0\\ u(1,t)=0\end{cases}\quad(0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases}u(x,0)=1\\ u_t(x,0)=0\end{cases}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$

を考えよう．この問題を解くために次のステップを実行しよう．

〈ステップ 1〉（変換を決定する）

変数 x の変域が 0 から 1 までであるから，有限変換を使わなければならない．また，この場合，正弦変換を使うべきであることも分かるであろう．この問題は，Laplace 変換で t を変換することによって解くこともできる（有限正弦変換とほぼ同程度の難しさになる）．

〈**ステップ 2**〉（変換を実行する）

偏微分方程式を変換すると

$$S[u_{tt}]=S[u_{xx}]+S[\sin(\pi x)]$$

が得られる（ここで便宜上 $S_n(t)=S[u]$ と書いた）．正弦変換の公式を使って

$$\begin{aligned}\frac{d^2S_n(t)}{dt^2}&=-(n\pi)^2S_n(t)+2n\pi[u(0,t)+(-1)^{n+1}u(1,t)]+D_n(t)\\&=-(n\pi)^2S_n(t)+D_n(t)\end{aligned}$$

が得られる．ここで

$$D_n(t)=S[\sin(\pi x)]=\begin{cases}1 & (n=1)\\0 & (n=2,3,\cdots)\end{cases}$$

（これらは Fourier 正弦級数の係数である）

さて，この境界値問題の初期条件を変換すると，常微分方程式の初期条件の形になる：

$$S[u(x,0)]=S_n(0)=\begin{cases}4/n\pi & (n=1,3,\cdots)\\0 & (n=2,4,\cdots)\end{cases}$$

$$S[u_t(x,0)]=\frac{dS_n(0)}{dt}=0$$

そこで，われわれの新しい初期値問題

常微分方程式　$$\frac{d^2S_n}{dt^2}+(n\pi)^2S_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\0 & (n=2,3,\cdots)\end{cases}$$

初期条件　$$\begin{cases}S_n(0)=\begin{cases}4/n\pi & (n=1,3,\cdots)\\0 & (n=2,4,\cdots)\end{cases}\\ \dfrac{dS_n(0)}{dt}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots)\end{cases}$$

を解くと

$$S_1(t)=A\cos(\pi t)+(1/\pi)^2$$

$$S_n(t)=\begin{cases}0 & (n=2,4,\cdots)\\ \dfrac{4}{n\pi}\cos(n\pi t) & (n=3,5,7,\cdots)\end{cases}$$

が得られる．ここで

$$A=\frac{4}{\pi}-\frac{1}{\pi^2}=1.17$$

である．したがって問題の解 $u(x,t)$ は

$$u(x,t)=\left[A\cos(\pi t)+\left(\frac{1}{\pi}\right)^2\right]\sin(\pi x)$$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos[(2n+1)\pi t]\sin[(2n+1)\pi x]$$

である．

注意

1. 有限正弦変換や余弦変換を適用するためには，$x=0$，$x=L$ における境界条件の両方共が

$$\left.\begin{aligned}u(0,t)&=f(t)\\u(L,t)&=g(t)\end{aligned}\right\}\quad\text{（このとき正弦変換を使用する）}$$

$$\left.\begin{aligned}u_x(0,t)&=f(t)\\u_x(L,t)&=g(t)\end{aligned}\right\}\quad\text{（このとき余弦変換を使用する）}$$

という形をしていなければならない．境界条件が $u(0,t)=f(t)$，$u_x(L,t)=g(t)$ というのでは駄目である．また，$u_x(0,t)+hu(0,t)=0$ というような境界条件も駄目である．このような境界条件に対しては別の変換がある．これらについては参考書2の中の一般化された正弦変換，余弦変換を参照せよ．

2. 有限正弦変換と余弦変換を適用するには，方程式の中に x の1次導関数が含まれていてはいけない（1次導関数の正弦変換は余弦変換を含み，また1次導関数の余弦変換は正弦変換を含むから）．

3. 有限正弦変換，有限余弦変換の方法は，本質的には，元の問題に含まれるすべての関数（u_{tt}, u_{xx}，初期条件，境界条件等）を Fourier 正弦級数，Fourier 余弦級数に分解し，Fourier 係数に関する一連の問題（常微分方程式）を解き，その結果を足し合わせるという方法である．

練習問題

1. 両端が絶縁されているときの拡散問題，すなわち

偏微分方程式　$u_t=u_{xx}$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(1,t)=0 \end{cases}$ $(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=1+\cos(\pi x)+0.5\cos(3\pi x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

を解け.

2. 一般的な問題

偏微分方程式　$u_t=\alpha^2 u_{xx}+bu+f(x,t)$ $(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases}$ $(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=0$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

を解け.

3. "注意" にある $S[u_{xx}]$ と $C[u_{xx}]$ の基本的な法則を導け. 式の中に1次導関数 u_x を含む微分方程式を解くのが何故難しいかわかるか.

4. $f(x)=\sin(\pi x)+0.5\sin(3\pi x)$ の有限正弦変換は何か. 正弦変換のグラフを描け. 変換の中で $L=1$ とせよ.

5. 関数 $f(x)=x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ の余弦変換は何か. その逆変換のグラフは x のあらゆる値に対してどんな形をしているか. ($0<x<1$ では $f(x)=x$ が再生されるが, 区間 (0, 1) の外ではどうなるか.)

6. 問題

偏微分方程式　$u_t=u_{xx}+\sin(3\pi x)$ $(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=1 \end{cases}$ $(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=\sin(\pi x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

を解け.

参考書

1. Tyn Myint-U, *Partial Differential Equations*, Elsevier, 1973. 有限正弦変換と余弦変換を使った例題の解がある. この本にはよい問題があり, 書き方は明快である.

2. R. Churchill, *Operational Mathematics*, McGraw-Hill, 1972. 積分変換とその応用についての話題を網羅している優れた本である. 本書より程度が高いが, 積分変換の技術に本当に興味のある者には役に立つ.

第26課　重ね合わせ
(線形システムの屋台骨)

目的：　重ね合わせの概念を紹介すること．重ね合わせの原理を使うと，問題を部分問題に分解して各部分問題を一つずつ解き，その結果を足し合わせて元の問題の解を得ることができる．そのようにして，問題を簡単化できる．また，すでに説明した線形方程式を解く二つの基本的な方法，すなわち変数分離と積分変換，も重ね合わせの原理を利用していることを示す．

技術者が，ある線形システムの入力 f に対する応答 u を求めようとするとき，普通やることは，

1. f を要素的な部分に分解する：$f=\sum f_k$；
2. f_k に対するシステムの応答 u_k を求める；

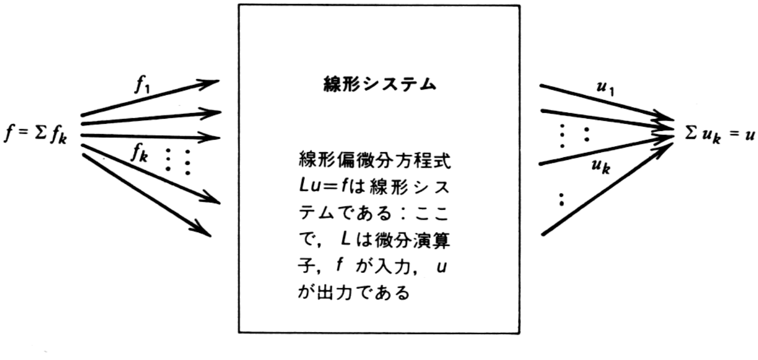


図 26.1　重ね合わせの基本的な考え方

3．応答 u_k を足し合わせ（重ね合わせ）て $u=\sum u_k$ を求める

という手順である．システムが線形であるなら，和 u は関数 f が直接入力されたときの応答に等しいということがわかる．これが**重ね合わせの原理**である（図 26.1）．

この基本的な考え方を使って，問題を部分問題に分解し，各部分問題を別々に解いてそれぞれの結果を足し合わせることにより，初期値・境界値問題を解くことができる．（もちろん，微分方程式と境界条件は線形でなければならない．）

初期値・境界値問題をより簡単な二つの問題に分解するときに使われる重ね合わせ

線形問題（P と呼ぶ）

$$
(P)\quad
\begin{cases}
\text{偏微分方程式} & u_t=u_{xx}+\sin(\pi x) \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty) \\
\text{境界条件} & \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty) \\
\text{初期条件} & u(x,0)=\sin(2\pi x) \quad (0\leqslant x\leqslant 1)
\end{cases}
$$

を考えよう．これは非同次の熱伝導方程式である．したがって，変数分離法は役に立たない．もちろん，変数 x に有限正弦変換を施したり，t に Laplace 変換を施したりすることもできるが，別のやり方として，二つの部分問題

$$
(P_1)\quad
\begin{cases}
\text{偏微分方程式} & u_t=u_{xx}+\sin(\pi x) \\
\text{境界条件} & \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \\
\text{初期条件} & u(x,0)=0
\end{cases}
$$

および

$$
(P_2)\quad
\begin{cases}
\text{偏微分方程式} & u_t=u_{xx} \\
\text{境界条件} & \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \\
\text{初期条件} & u(x,0)=\sin(2\pi x)
\end{cases}
$$

に分ける方法を考えてみよう．これら二つの問題は，少し努力すれば，別々に解くことができる．そして，明らかに P_1 の解と P_2 の解の和が元の問題 P の解であるはずである．すなわち，

$$u(x, t)=\frac{1}{\pi^2}(1-e^{-\pi^2 t})\sin(\pi x)+e^{-(2\pi)^2 t}\sin(2\pi x)$$

$\nearrow$ P_1 の解　　　　$\nearrow$ P_2 の解

一般に,

$$\begin{aligned}&u_t=u_{xx}+f(x, t)\\&u(0, t)=0\\&u(1, t)=0\\&u(x, 0)=\phi(x)\end{aligned}$$

の解は,

$$\begin{aligned}&u_t=u_{xx}+f(x, t)\\&u(0, t)=0\\&u(1, t)=0\\&u(x, 0)=0\end{aligned}$$

の解と

$$\begin{aligned}&u_t=u_{xx}\\&u(0, t)=0\\&u(1, t)=0\\&u(x, 0)=\phi(x)\end{aligned}$$

の解との和である.

変数分離および積分変換を重ね合わせと見なすこと

変数分離や積分変換を使うとき，それらを重ね合わせであるとは考えないかもしれないが，実際には，そのときわれわれは無限の重ね合わせという考え方を使っているのである．変数分離では，一般に，初期条件を無限個の簡単な部分に分け，各部分の応答を求め，そして，それら個々の応答を足し合わせて，問題の解を求めているのである．

一方，積分変換もまた重ね合わせの考え方を使っている．たとえば，有限正弦変換についてこのことを示そう．非同次熱伝導方程式

偏微分方程式　$u_t=u_{xx}+f(x, t)$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases}u(0, t)=0\\u(1, t)=0\end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x, 0)=0$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$

を取り上げ，有限正弦変換によってそれを解くときのことを考えよう．われわれが実際にやっていることは，入力 $f(x,t)$ を成分に分解し，各成分の応答 U_n を求め，それらの応答を足し合わせるということである．数学的には，このことはそれほど明白ではないかもしれないが，しかし，注意して眺めてほしい．まず，偏微分方程式

$$u_t = u_{xx} + f(x,t)$$

を Fourier 正弦 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\pi x) \tag{26.1}$$

に展開する．ここで，

$$A_n(t) = 2\int_0^1 u_t(x,t)\sin(n\pi x)dx$$

$$B_n(t) = 2\int_0^1 u_{xx}(x,t)\sin(n\pi x)dx$$

$$F_n(t) = 2\int_0^1 f(x,t)\sin(n\pi x)dx$$

である．始めに x と t の関数があったわけであるから，係数 A_n, B_n, F_n は実際は t の関数であることに注意せよ．また，入力 $f(x,t)$ が簡単な成分 $F_n(t)$ に分解されていることにも注意せよ．求めたいものは，各 $F_n(t)$ に対する応答 $U_n(t)$ である．それから，$U_n(t)$ を足し合わせて解 $u(x,t)$ を得ている．

単純応答 $U_n(t)$ を求めるには，偏微分方程式を (26.1) の形に分解したものを取り上げ，係数 $A_n(t)$ と $B_n(t)$ に対して少々の計算をして，被積分関数が u_t や u_{xx} ではなくて u を含むようにしなければならない．部分積分により

$$A_n(t) = 2\int_0^1 u_t \sin(n\pi x)dx = \frac{d}{dt}\left[2\int_0^1 u(x,t)\sin(n\pi x)dx\right] = \frac{dU_n(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} B_n(t) &= 2\int_0^1 u_{xx}\sin(n\pi x)dx \\ &= -(n\pi)^2 U_n(t) + 2n\pi[u(0,t) + (-1)^{n+1}u(1,t)] \end{aligned}$$

となる．ここで，$U_n(t)$ は $u(x,t)$ の正弦変換である．境界条件

$$u(0,t) = 0$$
$$u(1,t) = 0$$

をこの最後の式に代入すると

$$B_n(t) = -(n\pi)^2 U_n(t)$$

が得られる．したがって，偏微分方程式を分解した形 (26.1) は

$$\sum_{n=1}^{\infty}[U_n'+(n\pi)^2U_n-F_n(t)]\sin(n\pi x)=0$$

となる．これは x を含んだ恒等式であるから，その係数は零でなければならない．すなわち

$$U_n'+(n\pi)^2U_n=F_n(t)$$

でなければならない．したがって，F_n と U_n の間の入出力関係が得られる．

しかし，$U_n(t)$ を解く前に初期条件

$$u(x,0)=0$$

を何とかしなければならない．$u(x,0)$ を正弦級数に展開し，零に等しいと置くと

$$\sum_{n=1}^{\infty}U_n(0)\sin(n\pi x)=0$$

が得られる．したがって初期条件は

$$U_n(0)=0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

である．このようにして，元の初期値・境界値問題は簡単な入出力問題

$$\begin{array}{ll}\text{常微分方程式} & U_n'(t)+(n\pi)^2U_n(t)=F_n(t)\\ \text{初期条件} & U_n(0)=0 \quad (n=1,2,\cdots)\end{array}$$

に分解されてしまった．積分因子を用いて（あるいは Laplace 変換の方がよければ Laplace 変換を用いて）これらの問題を一つ一つ解くことができる．いずれにしろ，その答えは

$$U_n(t)=e^{-(n\pi)^2t}\int_0^t e^{(n\pi)^2\tau}F_n(\tau)d\tau$$

である．さてこれで，単純入力 $F_n(t)$ に対する応答 $U_n(t)$ は求まった．もうよくわかっているように，最後のステップは，これらの単純応答を足し合わせて，元の問題の解を求めることである：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)\sin(n\pi x)$$

各 $U_n(t)$ に $\sin(n\pi x)$ の重みが掛かっていることに注意せよ．もちろん，これらは $f(x,t)$ を $F_n(t)$ に分解したときに使った重みと同じである．

注意

有限正弦変換では，分解は無限級数であった．しかし，他のたいていの積分

変換では，分解は積分（連続分解）である．（x に関する）指数型 Fourier 変換について，問題

$$\text{偏微分方程式} \quad u_t = u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty)$$
$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = \phi(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

に同じような重ね合わせの解釈をしてみると面白いであろう．第 12 課で Green 関数を使ってこの問題を解いたときにやったことが本質的にはこのやり方であった．

練習問題

1. u_1 と u_2 がこの課の問題 P_1 と P_2 の解であるとき，$u_1 + u_2$ が問題 P を満足することを示せ．
2. 初期値・境界値問題

$$\text{偏微分方程式} \quad u_{tt} = u_{xx} + \sin(3\pi x) \quad (0 < x < 1,\ 0 < t < \infty)$$
$$\text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$
$$\text{初期条件} \quad \begin{cases} u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

を重ね合わせによって解け（各部分問題は何でも好きな方法で解いてよい）．

3. u_1 と u_2 が次の方程式の解であると仮定しよう．$u_1 + u_2$ はどのような方程式の解であるか．

   (a) $u_t = u_{xx}$

   (b) $u_t = u_{xx} + e^t$

   (c) $u_t = e^{-t} u_{xx}$

   (d) $u_t = u_{xx} + u^2$

   得られた答えから，どのような結論に到達できるか．

4. 四つの初期値・境界値問題の解を足し合わせると次のような問題の解になるような，そのような四つの初期値・境界値問題を求めよ．

$$u_t = u_{xx} + f(x, t) \quad (0 < x < 1,\ 0 < t < \infty)$$
$$\left.\begin{array}{l} u(0, t) = g_1(t) \\ u(1, t) = g_2(t) \end{array}\right. \quad (0 < t < \infty)$$
$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

5. 初期値問題

$$\text{常微分方程式} \quad U_n{}'(t) + (n\pi)^2 U_n(t) = F_n(t)$$
$$\text{初期条件} \quad U_n(0) = 0$$

を解け．解が正しいことを検証できるか．

6. u_1 と u_2 は共に線形同次境界条件

$$u_x(0,t)+h_1u(0,t)=0$$
$$u_x(1,t)+h_2u(1,t)=0$$

を満足するものとする．このとき，u_1+u_2 もまたこの境界条件を満足するか．

参考書

H. F. Weinberger, *A First Course in Partial Differential Equations*, Ginn and Company, 1965. この本には線形性と重ね合わせについての優れた節がある．また，複素変数についての長い節がある．特に第2章を見よ．

第 27 課　1 階の方程式(特性曲線法)

目的：（今までは 2 階の偏微分方程式だけしか学んでこなかったが）1 階の偏微分方程式というものを紹介し，初期値問題を解く重要な技術（特性曲線の方法）を紹介すること．われわれが解こうとしている問題は，初期値問題

偏微分方程式　$a(x,t)u_x+b(x,t)u_t+c(x,t)u=0$
$(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=\phi(x)\quad(-\infty<x<\infty)$

である．変数係数の問題を扱うのはこれが初めてであることに注意せよ．座標系を (x,t) から適当な新しい座標系 (s,τ)（特性座標系）に変えると，この偏微分方程式が常微分方程式になることがわかる．そこで，常微分方程式を解いて $u(s,\tau)$ を求め，そして最後に，s と τ を x と t で表す式を代入して $u(x,t)$ を求めるのである．

読者の記憶にあると思うが，われわれが拡散方程式

$$u_t=\alpha^2u_{xx}-vu_x\quad(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$$

を解いたときには，係数 α^2 は拡散の量を表し，v は媒質の速度を表していた．したがって，$\alpha=0$（拡散なし）なら，（対流だけしかないから）解は明らかに速度 v で x 軸に沿って動く．いいかえれば，初期解が $u(x,0)=\phi(x)$ であるなら，

$$u_t=-vu_x$$

の解は $u(x,t)=\phi(x-vt)$ となる．

そこで，（一つの解釈として）1 階の偏微分方程式

$$a(x,t)u_x+b(x,t)u_t=0$$

は，速度が

$$v=a(x,t)/b(x,t)$$

で与えられるような流れに沿って流される物質の濃度を表していると考えることができる．もちろん，$a(x,t)$ と $b(x,t)$ が定数ならば進行波解が得られ，一方，$a(x,t)$ と $b(x,t)$ が x や t と共に変化するならば流速は流れに沿っての距離と共にまた時間と共に変化する（このとき，初期の形が非常にゆがめられることもある）．

対流との類推についてはこれくらいにして，基本的な問題

$$\text{偏微分方程式}\quad a(x,t)u_x+b(x,t)u_t+c(x,t)u=0$$
$$(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$$
$$\text{初期条件}\quad u(x,0)=\phi(x)\quad(-\infty<x<\infty)$$

の話に戻ろう．この方程式（線形1階同次方程式）の解法は，ある点 x での初期擾乱が tx 平面内の曲線（特性曲線と呼ぶ）に沿って伝播する，という物理的事実に基づいている．図 27.1 を見よ．

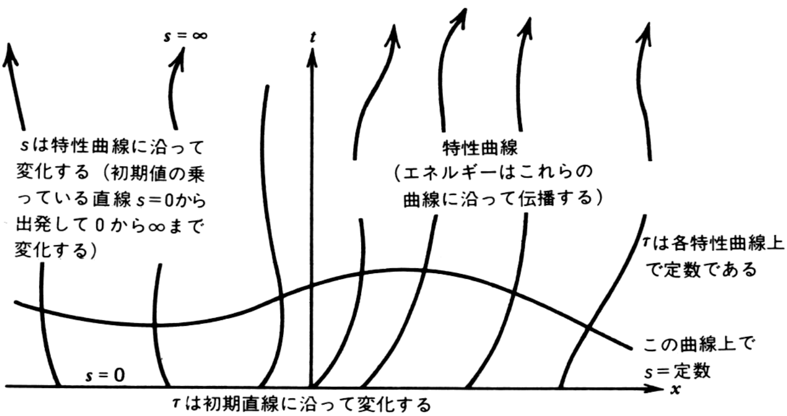


図 27.1 x における初期解は xt 平面内の同一曲線（特性曲線）上の解にだけ影響する

この現象は，ある点での初期擾乱が時間がたつにつれてすべての場所の解に影響を与えるというような他の多くの方程式（たとえば熱伝導方程式 $u_t=u_{xx}$）におけるものとは対照的である．また，記憶にあると思うが，バイオリンの弦のある点 x における初期変位の擾乱は tx 平面内の2本の直線に沿って解に影響を与えた（二つの動く波に対応する）のであった．図 27.2 を見よ．

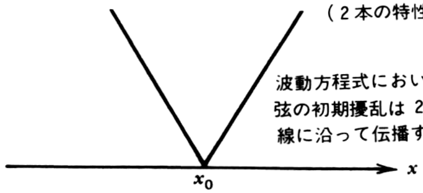


図 27.2　ある点での初期擾乱 $u(x,0)$ が二つの波を引き起こす

このことを念頭に置いて，次のような性質をもつ二つの新しい座標 s と τ を導入する（x と t に置き変える）ことを考えよう：

s は特性曲線に沿って変化する；

τ は初期曲線に沿って変化する（多くの場合直線 $t=0$ に沿って）．

まず，新しい座標 s を考えよう．上記の性質をもつ s を選ぶと偏微分方程式

$$a(x,t)u_x+b(x,t)u_t+c(x,t)u=0$$

は常微分方程式

$$\frac{du}{ds}+c(x,t)u=0$$

となる．もちろん，問題はこれらの特性曲線を求める求め方である．答えは簡単で，

$$\frac{dx}{ds}=a(x,t)$$

$$\frac{dt}{ds}=b(x,t)$$

であるような特性曲線 $\{[x(s),t(s)]:0<s<\infty\}$ を取ればよい．そうすると，

$$\frac{du}{ds}=u_x\frac{dx}{ds}+u_t\frac{dt}{ds}=a(x,t)u_x+b(x,t)u_t$$

であることは明白である．つまり，曲線 $\{[x(s),t(s)]:0<s<\infty\}$ に沿って，偏微分方程式は常微分方程式となる．例を使ってこの考え方を説明しよう．

例

次のような定数係数の初期値問題を解きたいとする：

偏微分方程式　$u_x+u_t+2u=0$　$(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件　　$u(x, 0)=\sin x \quad (-\infty<x<\infty)$

〈ステップ 1〉 特性曲線

$$\frac{dx}{ds}=1, \qquad \frac{dt}{ds}=1 \quad (0<s<\infty)$$

を求める（初期データはこの曲線に沿って伝播する）．これらの式を解く（ここでは s が独立変数であることを忘れないように）と，

$$x(s)=s+c_1 \qquad t(s)=s+c_2$$

となる．定数 c_1 と c_2 を求めるために $s=0$ のとき，図 27.1 を参照して

$$x(0)=\tau$$

$$t(0)=0$$

とする．そうすると $c_1=\tau$，$c_2=0$ になる．したがって，特性曲線は

$$x=s+\tau, \qquad t=s$$

である．これらの曲線が tx 平面でどんな形をしているかを見るには，上の 2 式から s を消去すればよい．そうすると

$$x-t=\tau \quad (-\infty<\tau<\infty)$$

が得られる（τ の各値に対して直線が得られる；たとえば $\tau=0$ ならば $t=x$ である）．図 27.3 を見よ．

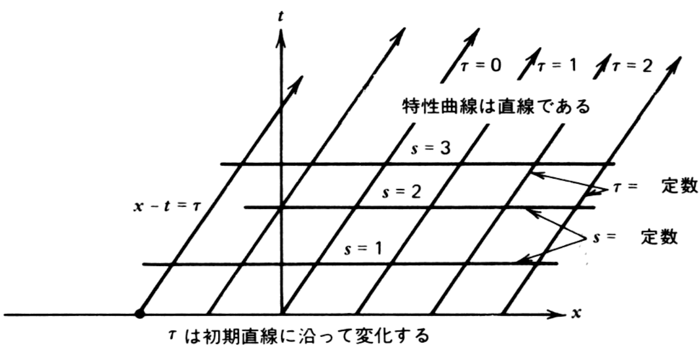


図 27.3　新しい座標系 (s, τ)

〈ステップ 2〉 この新しい座標系を使うと，偏微分方程式が常微分方程式に変わる：

$$\text{常微分方程式}\quad \frac{du}{ds}+2u=0 \quad 0<s<\infty$$

$$\text{初期条件}\qquad u(0)=\sin\tau$$

この初期値問題を解くと

$$u(s,\tau)=e^{-2s}\sin\tau$$

が得られる（ここでは u が s と τ の関数の形に書かれていることに注意せよ）.

したがってこれが解である．ただ一つ問題なのは，これではまだ解が本当の座標系によって表されていないということである． u を x と t の関数の形で求められればもっとよいであろう．それをステップ 3 で行う．

〈ステップ 3〉 変換の式

$$x=s+\tau,\qquad t=s$$

から， s と τ を x と t で表すと，

$$s=t,\qquad \tau=x-t$$

となる．したがって答えは

$$u(x,t)=e^{-2t}\sin(x-t)$$

である（確かめること）.

この式を見れば，初期波 $u(x,0)=\sin x$ が右へ進行しながら（この場合歪みは起きない）零へと減衰していることがわかる（図 27.4）.

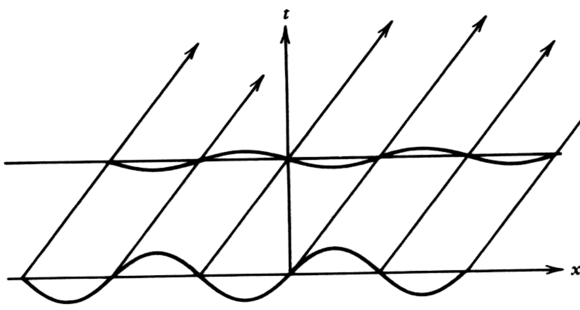


図 27.4　右へ一定速度で進み零へと減衰する解

これまで述べてきたことを要約しよう．

1 階（偏微分）方程式を解く一般的方法

初期値問題

偏微分方程式　$a(x,t)u_x+b(x,t)u_t+c(x,t)u=0$

$(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=f(x)\quad(-\infty<x<\infty)$

が与えられているとする．

〈ステップ 1〉　二つの常微分方程式（特性方程式）

$$\frac{dx}{ds}=a(x,t),\qquad \frac{dt}{ds}=b(x,t)$$

を解く．$x(0)=\tau$，$t(0)=0$ と置いて積分定数を決める．こうして (x,t) から (s,τ) への変換が得られる：

$$x=x(s,\tau)$$
$$t=t(s,\tau)$$

〈ステップ 2〉　常微分方程式

常微分方程式　$\dfrac{du}{ds}+c[x(s,\tau),t(s,\tau)]u=0\quad(0<s<\infty)$

初期条件　$u(0)=f(\tau)$

を解く．ここで，x と t を s と τ で表して係数 $c(x,t)$ に代入したことに注意せよ．

〈ステップ 3〉　常微分方程式を（初期条件の下で）解いて，解 $u(s,\tau)$ を得たとする．（ステップ1で定めた変換から）s と τ を x と t で表して，それを $u(s,\tau)$ に代入する．

以上のステップを次の例に適用してみよう（変数係数であることに注意せよ）．

第2の例

偏微分方程式　$xu_x+u_t+tu=0\quad(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=F(x)$　（任意の初期波形）

〈ステップ 1〉

$$\frac{dx}{ds}=x \quad を解いて,\quad x(s)=c_1e^s$$

$$\frac{dt}{ds}=1 \quad を解いて,\quad t(s)=s+c_2$$

$x(0)=\tau$，$t(0)=0$ とすると $c_1=\tau$，$c_2=0$．したがって，新しい座標系への変換は

$$x=\tau e^{s}$$
$$t=s$$

である．

〈**ステップ 2**〉

$$\frac{du}{ds}+su=0 \quad (0<s<\infty)$$
$$u(0)=F(\tau)$$

を解く．解は

$$u(s,\tau)=F(\tau)e^{-s^2/2}$$

である．

〈**ステップ 3**〉 s と τ を x と t で表すと $s=t$，$\tau=xe^{-t}$ となる．したがって解は

$$u(x,t)=F(xe^{-t})e^{-t^2/2}$$

である．たとえば，初期条件が $u(x,0)=\sin x$ ならば，解は

$$u(x,t)=\sin(xe^{-t})e^{-t^2/2}$$

である．

注意

この本で，2 階の偏微分方程式を先に論じ 1 階偏微分方程式を次に論じたのは何故か怪訝に思われるかもしれない．数学的な観点からは，その順序を逆にすることには何の問題もない．しかし，1 階偏微分方程式を解くときの考え方が 2 階偏微分方程式を解く技術にそれほど役立つわけではないという理由，および，2 階偏微分方程式の方がより重要であるという理由から，2 階偏微分方程式を最初に学ぶことに決めたのである．

常微分方程式を学ぶ場合には，事情が違う．解法，一般論などがみな，1 階の方程式から 2 階の方程式へと自然に進んで行く．したがって，教科書ではいつも 1 階の場合が先に扱われる．

練習問題

1. 簡単な濃度の問題

　偏微分方程式　$u_x+u_t=0 \quad (-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

　初期条件　$u(x,0)=\cos x \quad (-\infty<x<\infty)$

を解け．解はどのような形をしているか．それは偏微分方程式と初期条件を満足す

るか．

2. 問題

偏微分方程式 $xu_x+tu_t+2u=0$ $(-\infty<x<\infty,\ 1<t<\infty)$

初期条件 $u(x,1)=\sin x$ $(-\infty<x<\infty)$

を解け（ここでは時間が $t=1$ から始まっていることに注意せよ）．特性曲線はどんな形をしているか．いろいろな値の時刻における解のグラフを描け．そして，当然のことながら，答えの検証をせよ．

3. より高次元の問題（表面波）

偏微分方程式 $au_x+bu_y+cu_t+du=0$ $(-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件 $u(x,y,0)=e^{-(x^2+y^2)}$ $(-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty)$

を解け．ここで a,b,c,d は与えられた定数である．（答えを検証せよ．）

4. $u_x+u_t+tu=0$ $(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

$u(x,0)=F(x)$ $(-\infty<x<\infty)$

を解け．答えを検証せよ．

5. 通常の初期直線 $t=0$ 以外の曲線上で解 u を指定することも可能である．実際，微分方程式は時間変数を含まなくてもよい（u が空間変数だけに依存するものであってもよい）．より一般的な問題

偏微分方程式 $u_x+2u_y+2u=0$ $(-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty)$

初期条件 曲線 $C: y=x$ 上で $u(x,y)=F(x,y)$

を解いてみよ（関数 $F(x,y)$ は与えられているものとする）．

参考書

C. R. Chester, *Techniques in Partial Differential Equations*, McGraw-Hill, 1971. 1階偏微分方程式のことが簡明に書いてある．気体力学への応用が第 13 章にある．

第28課　非線形1階方程式(保存方程式)

目的：　1階非線形方程式の考え方を紹介し，そのうちのあるもの（いわゆる保存方程式）が物理現象の記述にどう使えるかを示すこと．**初期条件**

$$u(x,0)=\phi(x)$$

の下での

$$u_t+g(u)u_x=0$$

という特殊な形の保存方程式は高速道路の自動車の流れを記述するのに使える．この例は，偏微分方程式が，物理学，生物学，工学で昔から扱われている物理現象以外の物理現象を記述するのにも使えることを指摘している．この特殊な非線形方程式は，道路に沿って伝播する不連続な解（衝撃波）を引き起こしうることがわかる．

数学の中で最も役に立つ偏微分方程式の一つが**保存方程式**

★ $$u_t+f_x=0$$

である．この式が述べていることは，ある物理量の増加率（時間に関する）u_t が，その量の境界をよぎる流速の変化率（場所に関する）$-f_x$ に等しい（流束は左から右へ測る）ということである．流体力学においては，$u(x,t)$ は x における流体の密度を表し，$f(x,t)$ が流束（時刻 t に点 x を通り過ぎる液体の量）である．（非粘性，非圧縮等の仮定のような）いろいろ細かい流体力学の概念に深入りしないで済ますために，この課では，保存方程式が交通流予測に使えることを示す（水の分子の流れではなく車の流れを考える）．まず保存方程式を導こう．

保存方程式の導出

車が左から右へ走っていて，途中に出口も入口もない，一本の長い高速道路があるとしよう．また，

$u(x,t)=$ x における車の密度（x における単位長あたりの台数）

$f(x,t)=$ x における車の流束（点 x を1分ごとに通過する台数）

としよう．そうすると，道路の区間 $[a,b]$ に対して，（時間に関する）車の台数の変化率が次の両方の式で与えられることは明らかである：

$$[a,b]\text{ における車の台数の変化率}=\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx$$

および

$$[a,b]\text{ における車の台数の変化率}=f(a,t)-f(b,t)=-\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dx$$

（2番目の式では微積分学の基本定理を使っている.）これら二つの積分を互いに等しいと置くと

$$\int_a^b \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx=-\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dx$$

が得られる．最後に，区間 $[a,b]$ が任意に選べることを考慮すると，被積分関数そのものが等しくなければならないことになるので，1次元の保存方程式

$$u_t+f_x=0$$

が得られる．2次元，3次元においては，y と z の二つの次元方向に対しても同様な解析を行うと，

$$u_t+f_x+g_y=0 \qquad \text{（2次元の保存方程式）}$$

$$u_t+f_x+g_y+h_z=0 \qquad \text{（3次元の保存方程式）}$$

が得られる．

交通問題に対する保存方程式

方程式 $u_t+f_x=0$ についてはあまり複雑なことはない．ただ，方程式には二つの未知数があるというだけである．だから，この方程式の使い方と，これを使って求めることができるのは何かということを考えよう．

交通制御では，与えられた点を通過する車の量（流束）は，一般に，車の密度 u の関数であるということが経験的に知られている．いいかえれば，$f(u)$ は実験により求めることができる．密度 u が増すにつれて流束 f も増加する（少なくともあるところまでは）ことは明らかである．交通流の典型的モデルは，式

$$f(u)=Au(1-u)$$

であろう．図 28.1 を見よ．

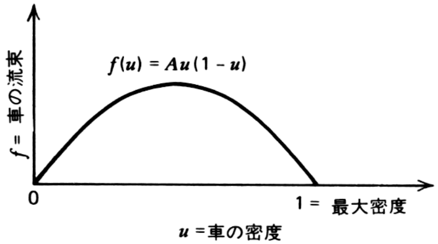


図 28.1　典型的な流束・密度曲線

流束としてはこの他に

1. $f(u)=ku$　（線形流束・密度関係）
2. $f(u)=u^2$　（2次流束・密度関係）

などの形が考えられる．交通制御で使われる流束・密度関係をさらに詳しく知りたければ参考書4を見よ．

さて，これで保存方程式 $u_t+f_x=0$ の交通問題への適用し方を説明する準備はできた．まず，流束の変化率 f_x を $f_x=\left(\dfrac{df}{du}\right)u_x$ と書き直し（合成関数の導関数），保存方程式に代入する．すると

$$u_t+\frac{df}{du}u_x=u_t+g(u)u_x=0$$

となる．たとえば，流束が式 $f(u)=u^2$ によって密度に依存するならば，保存方程式は

$$u_t+2uu_x=0$$

となる．したがって，車の初期密度が $u(x,0)=\phi(x)$ であったとき任意の時刻における密度を求めるには，初期値問題

偏微分方程式　$u_t+2uu_x=0$　$(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=\phi(x)$　$(-\infty<x<\infty)$

を解けばよい．このことを念頭において，非線形初期値問題を解こう．

非線形初期値問題

偏微分方程式　$u_t+g(u)u_x=0$　$(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=\phi(x)$　$(-\infty<x<\infty)$

前の課で対流方程式

$$u_t+vu_x=0$$

を学んだが，それを思い出してみると，関数 $u(x,t)$ は速度 v で動く流れの中の濃度のようなものを表していた．非線形方程式

$$u_t+g(u)u_x=0$$

はこれと似ている．ここでは，水の分子が点 x_0 を出て上流あるいは下流へ速度 $g(u)$ で動くと想像することができる．したがって，t 秒後の分子の位置 x は

$$x=x_0+g(u)t \quad (\text{特性方程式})$$

となろう．濃度 $u(x,t)$ は一つの特性曲線上では変化しないということを思い出すと，初期濃度 $u(x_0,0)$ がわかれば，x の特性方程式は

$$x=x_0+g[u(x_0,0)]t \quad [(x_0,0)\text{ を出る特性曲線}]$$

と書ける．たとえば，初期値問題

$$\text{偏微分方程式} \quad u_t+3uu_x=0$$

$$\text{初期条件} \quad u(x,0)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geqq 0\end{cases}$$

を解く際には，最初の点，たとえば $(2,0)$，を出る特性曲線は

$$\begin{aligned}x&=2+g[u(2,0)]t\\&=2+g(1)t\\&=2+3t\end{aligned}$$

と書ける．ここで，初期値問題の解 $u(x,t)$ が直線 $x=2+3t$ 上ですべての $t>0$ に対して1という値をもつことを要求することができる．すなわち，す

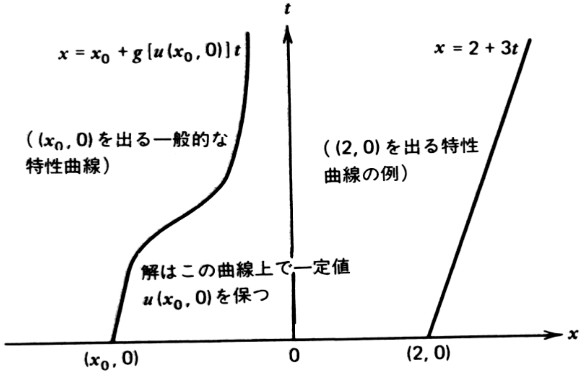


図 28.2 $u_t+g(u)u_x=0$ の特性曲線

べての $t>0$ に対して $u(2+3t,t)=1$ である．一般的な特性曲線とこの特殊な例との両方を図 28.2 に見ることができる．

各点を出るこれらの特性曲線を知り（解がこれらの曲線に沿って変化しないことを知りさえすれば，これらを継ぎ合わせるあらゆる時刻 t における解 $u(x,t)$ を作ることができる．われわれは，ここでは，解 $u(x,t)$ を x と t の関数として陽な形に実際に表そうとするのではなく，ある興味ある問題を解くのにこの方程式の特性曲線の知識を使おうというのである．

交通流問題

流束が $f(u)=u^2$ で与えられ，車の初期密度が与えられている交通流問題を解こう．つまり，問題は

偏微分方程式　$u_t+2uu_x=0 \quad (-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=\begin{cases}1 & (x\leqslant 0)\\ 1-x & (0<x<1)\\ 0 & (1\leqslant x)\end{cases}$

である．図 28.3 を見よ．

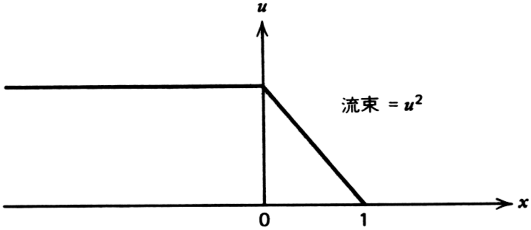


図 28.3　左から右へ動く車の初期密度

各初期点 $(x_0,0)$ を出る特性曲線を求めることから始めよう．$x_0\leqslant 0$ に対しては特性曲線は

$$\begin{aligned} x &= x_0+g[u(x_0,0)]t \\ &= x_0+g(1)t \\ &= x_0+2t \end{aligned}$$

である．これを t について解くと，直線

$$t=\frac{1}{2}(x-x_0)$$

が得られる．図 28.4 にはこれらの直線が描いてある．次に初期点 $0<x_0<1$ を考えよう．ここでは特性曲線は

$$\begin{aligned}x&=x_0+g[u(x_0,0)]t\\&=x_0+g[(1-x_0)]t\\&=x_0+2(1-x_0)t\end{aligned}$$

である．これもまた t について解けば

$$t=\frac{x-x_0}{2(1-x_0)}$$

が得られる．最後に，$1\leqq x_0<\infty$ に対しては特性曲線は

$$\begin{aligned}x&=x_0+g[u(x_0,0)]t\\&=x_0+g(0)t\\&=x_0\end{aligned}$$

であり，これは x_0 から出る鉛直線を表す．この問題の特性曲線は図 28.4 の通りである．

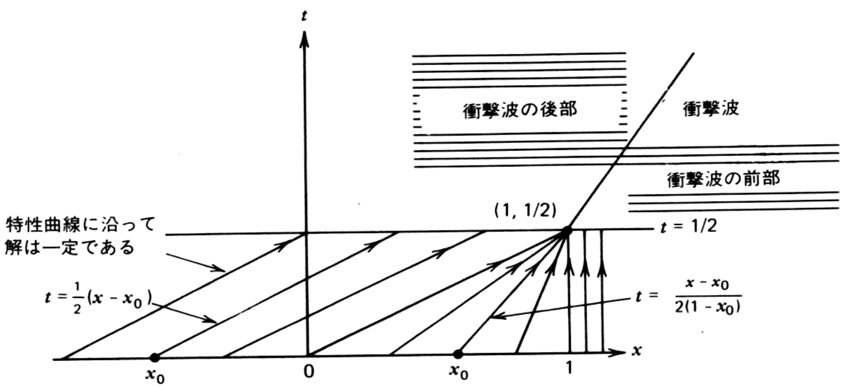


図 28.4　方程式 $u_t+2uu_x=0$ の特性曲線

$0<t<1/2$ に対して交通量がどんな動きをするかはこれで明らかである．図 28.5 には，いろいろな時刻における解のグラフを描いてある．

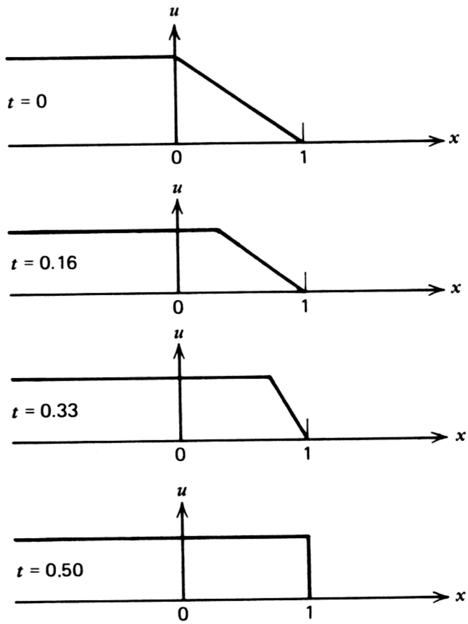


図 28.5 いろいろな時刻における交通密度

$t=1/2$ において特性曲線が合流してしまうことに注意せよ．したがって，$t=1/2$ 以後の解を求めるには別のやり方で解析をしなければならない．特性曲線が重なるとき，衝撃波（不連続解）という現象が得られる．調べるべきことは，衝撃波の前縁が道路に沿ってどれだけの速さで伝播するかということである．衝撃波についてのもっと詳しい議論およびそれに関する文献については，この課の参考書の表の中で推薦している参考書2によく書いてある．一目瞭然というわけではないが，不連続点の動く速度は

$$S=\frac{f(u_R)-f(u_L)}{u_R-u_L}$$

で与えられる．ここで，u_R と u_L は波面の右側と左側の解の値であり，$f(u_R)$ と $f(u_L)$ はこれらの点における流束の値である．したがって，われわれの例では，（$f(u)=u^2$ だから）波面の速度は

$$S=\frac{0-1}{0-1}=1$$

となる．これは，$t>1/2$ に対して，波面が左から右へ速度1で動くということを意味している．

図 28.5 に

$$\text{偏微分方程式}\quad u_t+2uu_x=0 \quad (-\infty<x<\infty)$$

$$\text{初期条件}\qquad u(x,0)=\begin{cases}1 & (x\leqq 0)\\ 1-x & (0<x<1)\\ 0 & (1\leqq x)\end{cases}$$

の解の完全な形が図示されている．

注意

1. われわれの例における衝撃波は，流束が密度 u の関数として急に大きくなるようなものであったために起きた．ところで，流束が $f(u)=u$ で与えられたなら，流れを記述する偏微分方程式は $u_t+u_x=0$ となり，解は歪まずに進行する進行波となる（初期波がただ右へ動くだけ）．

   $f(u)=u$ の意味を少し考えてみれば，解がこのように動くであろうことは明白である．

2. $$u=\phi[x-g(u)t]$$

   が非線形問題

$$u_t+g(u)u_x=0 \quad (-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$$
$$u(x,0)=\phi(x) \quad (-\infty<x<\infty)$$

の陰な解であることは，直接代入により実際に証明できる．たとえば，初期値問題

$$\text{偏微分方程式}\quad u_t+uu_x=0$$
$$\text{初期条件}\qquad u(x,0)=x$$

の陰な解は

$$\begin{aligned}u&=\phi[x-g(u)t]\\ &=x-g(u)t\\ &=x-ut\end{aligned}$$

である．この特殊な例では（多くの例ではこうはならないが），$u(x,t)$ を x と t の関数として陽な形に表すことができる．そうすると

$$u(x,t)=\frac{x}{1+t}$$

が得られる．これを確かめよ．

練習問題

1. 初期値問題

   偏微分方程式　$u_t+uu_x=0 \quad (-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

   初期条件　$u(x,0)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ x & (0\leqq x)\end{cases}$

   を解け．いろいろな時刻における解のグラフを描け．その解はどう解釈できるか．この問題の流束・密度の関係はどうか．

2. 偏微分方程式　$u_t+u^2u_x=0 \quad (-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

   初期条件　$u(x,0)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ x & (0\leqq x)\end{cases}$

   を解け．流束・密度の関係はどうか．解がそのように振る舞うと思うか．練習問題1と練習問題2の解を比較せよ．

3. 非粘性流体が管の中を動いて行き，さらに，流体は管の壁から法則 $F(u)=ku$(kg/(m·s)) に従って漏れるものとしよう．すると，保存方程式（ここでは“非”保存方程式）は

   $$u_t+f_x=-F(u)$$

   となる．$f(u)=u$，$u(x,0)=\phi(u)$（一般の初期密度）のとき，この方程式の解は何か．その解はどう解釈できるか．

4. 外への漏れが $F(x,t)=1/x$ に変わったら，この非保存方程式の解はどうなるか．その解は要求されている性質を満足しているか．物理的に意味をなすか．

5. $u=\phi[x-g(u)t]$ が非線形問題

   偏微分方程式　$u_t+g(u)u_x=0$

   初期条件　$u(x,0)=\phi(x)$

   の陰な解であることを証明せよ．

参考書

1. G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, University Press, 1970. 流体力学について広範囲のことを扱った優れた本である．
2. P. Lax, *Formation and Decay of Shock Waves*, Mathematical Monthly, March 1972. 衝撃波が空間中をいかに伝播するかについて，第一級の数学者が書いた読みやすい説明である．

3. E. C. Zachmanoglou, D. W. Thoe, *Introduction to PDEs with Applications*, Williams and Wilkins, 1976. 第3章には1階非線形方程式のことが上手に書かれており，例題もある．

4. F. A. Haight, *Mathematical Theory of Traffic Control*, Academic Press, 1963. 交通制御の問題が数学的に記述されている．この種の本は何冊かあるがその中の一冊である．

第29課　連立偏微分方程式

目的：　多くの物理系（特に流体力学におけるもの）はただ1個の偏微分方程式では記述できず，実際には，互いに絡み合った連立方程式によってモデル化されるということを指摘すること．これらの方程式においては，圧力$=p(x,y,z,t)$，密度$=\rho(x,y,z,t)$，温度$=T(x,y,z,t)$（およびそれらの偏導関数）のような，いくつかの未知関数が物理法則によって記述される．われわれはこれらの関数すべてを同時に求めようというのである．

また，線形連立方程式

$$u_t+Au_x=0$$

をいくつかの新しい独立な方程式

$$v_t+\Lambda v_x=0$$

に分解して解く方法も示す．（こうすると各方程式は別々に解くことができる．）

科学の多くの分野において，複数個の未知量（とその導関数）が複数個の方程式に関係していることがある．たとえば，2次元流体力学では

$$
\begin{aligned}
&u_t+uu_x+vu_y+\frac{1}{\rho}p_x=0 && (x\text{ 方向の運動量保存法則})\\
&v_t+uv_x+vv_y+\frac{1}{\rho}p_y=0 && (y\text{ 方向の運動量保存法則})\\
&\rho_t+(\rho u)_x+(\rho v)_y=0 && (\text{質量保存の法則})\\
&\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)_t+u\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)_x+v\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)_y=0 && (\text{エネルギー保存の法則})
\end{aligned}
\tag{29.1}
$$

という四つの方程式が **Euler の流体運動方程式**と呼ばれる非線形連立偏微分方程式を構成する．ここで，

$$p(x,y,t)=\text{流体の圧力}$$

$$u(x,y,t)=\text{流体の } x \text{ 方向の速度}$$

$v(x, y, t)$＝流体の y 方向の速度

$\rho(x, y, t)$＝流体の密度

γ＝比熱比（＝定圧比熱/定積比熱）

である．ここでわれわれが直面している問題は，四つの方程式および初期条件，境界条件を満たす未知関数 p, u, v, ρ を同時に求めることである．

連立方程式を学ぶ理由は他にもある．常微分方程式論では，一つの2階常微分方程式が1階の2元連立方程式に書き直せるということを思い出してほしい．偏微分方程式論では，物事はそう簡単ではないが，高階の偏微分方程式を1階の連立方程式に書き直せる場合がしばしばある．たとえば，電信方程式

$$u_{tt}=c^2u_{xx}+au_t+bu$$

は，三つの変数

$$u_1=u$$

$$u_2=u_x$$

$$u_3=u_t$$

を導入することにより，等価な三つの1階偏微分方程式の形に書き直すことができる．電信方程式が三つの方程式

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=u_2$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=u_3 \tag{29.2}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}=c^2\frac{\partial u_2}{\partial x}+au_3+bu_1$$

に等価であることは簡単にわかる．(29.2) のような連立方程式を解くためには，行列の固有値と固有ベクトルに馴染んでいる必要がある．そのため，線形代数の簡単な復習をしよう．

線形代数の復習

【一般の場合】

定義：　Aがn行n列の行列であるとき，Aのn個の固有値とはλの代数方程式

$$\det(A-\lambda I)=0$$

のn個の根のことである．ここで，$\det(A-\lambda I)$ は行列 $A-\lambda I$ の行列式で，λの多項式である．いくつかの固有値が同じ数値になることもある．

【特殊な場合】

例：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

とする．この行列Aの二つの固有値は方程式

$$\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 4 & 1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^2-4$$
$$=\lambda^2-2\lambda-3=0$$

の根，すなわち

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=3$$

である．

定義：　λ が行列 A の固有値であるとき，λ に対応する固有ベクトルとは，$Ax=\lambda x$ を満たす非零ベクトルのことである．

例：

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

であるから，$\lambda_2=3$ に対応する固有ベクトルは

$$X=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

である．

定義：　I を単位行列として，$AA^{-1}=A^{-1}A=I$ を満たす行列 A^{-1} を行列 A の逆行列という．

例：

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

の逆行列は

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0.25 & 0.5\\ -0.25 & 0.5\end{bmatrix}$$

である．実際，

$$AA^{-1}=A^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

である．

行列の対角化

A が n 行 n 列の行列で，n 個の異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ をもつとき，そして

$$P=\left[X_1 \,\vdots\, X_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, X_n\right]=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\cdots\cdots x_{1n}\\ x_{21} & x_{22}\cdots\cdots x_{2n}\\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots\\ x_{n1} & x_{n2}\cdots\cdots x_{nn}\end{bmatrix}$$

が λ_j に対応する固有ベクトルを第 j 列にもつような行列であるとき，

$$P^{-1}AP=\Lambda$$

は対角行列である：

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

ただし P^{-1} は P の逆行列である．たとえば，行列

$$A=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

は固有値 $\lambda_1=4$ と $\lambda_2=-4$ をもち，対応する固有ベクトルは

$$X_1=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} \qquad と \qquad X_2=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$$

である．したがって，積

$$\begin{aligned}P^{-1}AP&=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 8\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1/4 & 1/2\\ -1/4 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 8\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

は対角行列

$$\Lambda=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$$

に等しくなる．（確かめてみよ.）

さて，簡単な2元連立方程式（および初期条件）を解こう．

線形連立方程式 $u_t+Au_x=0$ の解

二つの偏微分方程式と二つの初期条件とからなる初期値問題

$$(29.3)\quad \begin{array}{lll} \text{偏微分方程式 1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial t}+8\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=0 & \\ & & (-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)\\ \text{偏微分方程式 2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial t}+2\dfrac{\partial u_1}{\partial x}=0 & \\ \text{初期条件 1} & u_1(x,0)=f(x) & \\ & & (-\infty<x<\infty)\\ \text{初期条件 2} & u_2(x,0)=g(x) & \end{array}$$

を考えよう．この問題は，初期圧と初期密度が与えられているときに，$u_1(x,t)$ ＝圧力 と $u_2(x,t)$＝密度 とを（空間変数）x と（時間）t の関数として求めることに対応していると思ってよかろう．

二つの偏微分方程式を行列の形に書くことから始めよう．

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 8\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

すなわち

$$A=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 2 & 0\end{bmatrix},\quad u_t=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}\end{bmatrix},\quad u_x=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\end{bmatrix},\quad 0=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

とおいて

(29.4)
$$u_t+Au_x=0$$

となる．次に，新しい未知数

$$v=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$

を，変換

$$u=Pv$$

により導入する（変数変換の技法）．ここで，P は A の固有ベクトルを列とする行列である（P は既知）．v が満足する連立方程式は非常に易しい形をしている（新しい未知数 v_1 と v_2 の二つの方程式は互いに独立である）ので，v_1 と v_2 を簡単に求めることができるということがわかる．v_1 と v_2 を求めてしまったら，

$$u=Pv$$

から u_1 と u_2 を計算する．ところでまず，v がどんな連立方程式を満足するかを調べよう．それには，行列算の形で考えるとよい．すなわち，行列の変換 $u=Pv$ から始めると，この方程式を微分することができて

(29.5)
$$\frac{\partial u}{\partial t}=P\frac{\partial v}{\partial t}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=P\frac{\partial v}{\partial x}$$

が得られる．（読者はこの式を成分ごとに書き下して，何がどうなっているかを確実に知っておいてほしい．）式（29.5）を連立方程式

$$u_t+Au_x=0$$

に代入して

$$Pv_t+APv_x=0$$

が得られる．このベクトル方程式の両辺に P^{-1} を掛けて

$$v_t+P^{-1}APv_x=0$$

すなわち

(29.6)
$$v_t+\Lambda v_x=0$$

が得られる．われわれの行列 A に対しては

$$\Lambda=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$$

であることをすでに知っているから，式 (29.6) を成分ごとに書き下して二つの方程式

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+4\frac{\partial v_1}{\partial x}=0$$

(29.7)

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}-4\frac{\partial v_2}{\partial x}=0$$

が得られる．これらは二つの互いに関係のない方程式で，それぞれ独立に解くことができる．実際，これらの方程式が進行波解

$$v_1(x, t)=\phi(x-4t)$$
$$v_2(x, t)=\psi(x+4t)$$

をもつということはもう知っているはずである（ϕ と ψ は任意の微分可能な関数である)．

これらが v_1 と v_2 の値である．一般解 u を求めるには，単に

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}=P\boldsymbol{v}&=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi(x-4t)\\ \psi(x+4t)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2\phi(x-4t)-2\psi(x+4t)\\ \phi(x-4t)+\psi(x+4t)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

を計算すればよい．すなわち，

(29.8)

$$u_1(x, t)=2\phi(x-4t)-2\psi(x+4t)$$
$$u_2(x, t)=\phi(x-4t)+\psi(x+4t)$$

である．このようにして，問題 (29.8) の 2 元連立偏微分方程式の一般解が求められた．

解は無限個あるが，たとえば

$$\phi(\xi)=\sin\xi$$
$$\psi(\xi)=\xi^2$$

（二つの任意の関数をこうおいてみる）

とおけば

$$u_1(x, t)=2\sin(x-4t)-2(x+4t)^2$$
$$u_2(x, t)=\sin(x-4t)+(x+4t)^2$$

となる.

一般解 (29.8) を初期条件

$$u_1(x,0)=f(x)$$
$$u_2(x,0)=g(x)$$

に代入すると,

$$2\phi(x)-2\psi(x)=f(x)$$
$$\phi(x)+\psi(x)=g(x)$$

となるので, これを解いて ϕ と ψ を定めると

$$\phi(x)=\frac{1}{4}[f(x)+2g(x)]$$

$$\psi(x)=\frac{1}{4}[2g(x)-f(x)]$$

したがって, 初期値問題 (29.3) の解は次のようになる:

$$\begin{aligned} u_1(x,t)&=2\phi(x-4t)-2\psi(x+4t)\\ &=\frac{1}{2}[f(x-4t)+2g(x-4t)]-\frac{1}{2}[2g(x+4t)-f(x+4t)]\\ u_2(x,t)&=\phi(x-4t)+\psi(x+4t)\\ &=\frac{1}{4}[f(x-4t)+2g(x-4t)]+\frac{1}{4}[2g(x+4t)-f(x+4t)] \end{aligned} \tag{29.9}$$

注意

1. 連立方程式の数値解法はいろいろなものが開発されていて, 計算機のプログラムは n 元 1 階連立方程式を解くように書かれているのが普通である. そのため, これらのプログラムを使うとき, 高階の方程式を 1 階の連立方程式に書き直さなければならない場合が多い.
2. 線形連立方程式
$$u_t+A(x,t)u_x+B(x,t)u=0$$
も, $u_t+Au_x=0$ を解いたのと同じような方法で解くことができる. 主な相違点は, 固有ベクトル $X(x,t)$ が作る行列 P が x と t の関数になるかもしれないという点である.

練習問題

1. (29.2) の連立偏微分方程式を行列の形

$$Au_t+Bu_x+Cu=0$$

に書け．ここで，A, B, C は 3×3 の行列である．

2. 行列

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\4 & 1\end{bmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ．

3. 練習問題2の結果を使って，連立方程式

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+4\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial x}=0$$

の一般解を求めよ．

ヒント まず，連立方程式を行列の形 $u_t+Au_x=0$ に書き変えよ．

4. 成分ごとの式を書き下して，式（29.5）が正しいことを証明せよ．

5. 式（29.8）の関数 u_1 と u_2 が式（29.3）の2元連立偏微分方程式を満足することを検証せよ．

参考書

E. C. Zachmanoglou, D. W. Thoe, *Introduction to PDEs with Applications*, Williams and Wilkins, 1976. よく書けた教科書で，連立方程式のことも上手に取り扱っている．程度は本書より高い．

第30課　太鼓の膜の振動
(極座標の波動方程式)

目的：　波動方程式で太鼓の膜の振動が記述できることを示す．ここでの基本方程式は，波動方程式

$$u_{tt}=c^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right)$$

である．

$$u(r,\theta,t)=R(r)\Theta(\theta)T(t)$$

という形の基本的な定常波解がほしいときには，この波動方程式は三つの常微分方程式

$$T''+\lambda^2c^2T=0\quad\text{（単純調和振動）}$$

$$r^2R''+rR'+(\lambda^2r^2-n^2)R=0\quad\text{（Bessel の方程式）}$$

$$\Theta''+n^2\Theta=0\quad\text{（単純調和振動）}$$

に帰着できる．三つの常微分方程式の解の積 $R(r)\Theta(\theta)T(t)$ は，みな，太鼓の膜の基本振動を表す．また，$R(r)\Theta(\theta)$ はその振動の形を表す．任意の初期条件を満たす太鼓の膜の振動を求めるには，初期条件を満たすように基本振動の一次結合を作ればよい．

この課の目的は単純である．つまり，与えられた境界条件と初期条件の下で円形の太鼓の膜の振動を求めることである．簡単のため，円の半径を1とし，境界でのデータは零とする．したがって，問題は

偏微分方程式　$u_{tt}=c^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right)\quad(0<r<1)$

境界条件　$u=0\quad(r=1,\ 0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases}u=f(r,\theta)\\ u_t=g(r,\theta)\end{cases}\quad(t=0)$

を満足する $u(r,\theta,t)$（太鼓の膜面が平面からどのくらいずれているかを表す）を求めることである．図 30.1 を見よ．

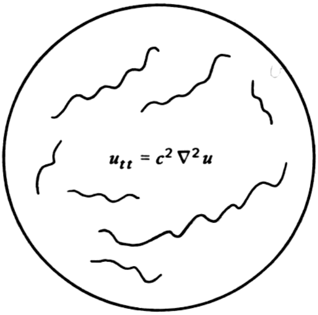


図 30.1 太鼓の膜の振動（双曲型の初期値・境界値問題）

この問題を解くために，第 20 課のバイオリンの弦の問題を思い出そう．そこでは無限個の単純振動の重ね合わせを用いて解を構成した．太鼓の膜の問題にも同じように取り組むとすれば，

$$u(r,\theta,t)=U(r,\theta)\,T(t)$$

という形の解を探すことになる．これは振動の形 $U(r,\theta)$ に振動の時間因子 $T(t)$ を掛けた形のものとなっている．上式を方程式に代入すると（練習問題 1），二つの方程式

$$\nabla^2 U+\lambda^2 U=0 \quad \text{（Helmholtz の方程式）}$$

$$T''+\lambda^2 c^2 T=0 \quad \text{（単純調和振動）}$$

に到達する．ここで

$$\nabla^2 U=U_{rr}+\frac{1}{r}U_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}$$

である．$T(t)$ を周期関数にしたいので分離定数を正にする必要があった（したがってそれを λ^2 とおいた）ことに注意せよ．

次のステップは **Helmholtz**（ヘルムホルツ）の方程式を解くことである．しかし，それにはまず境界条件が必要である．そのため，$u(r,\theta,t)=U(r,\theta)\,T(t)$ を太鼓の膜の境界条件に代入すると

$$u(1,\theta,t)=U(1,\theta)\,T(t)=0 \quad (0<t<\infty)$$

すなわち

$$U(1,\theta)=0$$

が得られる．したがって，基本振動の形 $U(r,\theta)$ を求めるには次のような問題を解かなければならないということになる：

$$\nabla^2 U+\lambda^2 U=0$$
$$U(1,\theta)=0$$

これが楕円型固有値問題で非常に有名な問題である．われわれの目的は零でない解を与えるようなすべての λ（そういうものがあるならば）を探すことである．解 $U(r,\theta)$ は太鼓の膜の振動の基本モードの形を表している．また，λ はある Bessel（ベッセル）関数の根であって，これらの振動の周波数に比例する．

そこで，次のステップは Helmholtz の固有値問題を解くことである（これはそれ自身大切な問題である）．それは，境界条件が零である他のたいていの線形同次偏微分方程式と同じように，すなわち変数分離によって，解くことができる．

Helmholtz の固有値問題の解（部分問題）

偏微分方程式　$\nabla^2 U+\lambda^2 U=0$

境界条件　$U(1,\theta)=0$

を解くため

$$U(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$$

とおき，Helmholtz の境界値問題にこれを代入する．すると，

$$r^2R''+rR'+(\lambda^2r^2-n^2)R=0 \quad \text{(Bessel の方程式)}$$
$$R(1)=0$$
$$\Theta''+n^2\Theta=0$$

となる．（各自試みよ．）$\Theta(\theta)$ は周期 2π の周期関数でなければならない（膜（太鼓の膜）の振動の形が θ に関して周期的でなければならないことは明らか）から，新しい分離定数を n^2 $(n=0,1,2,\cdots)$ と選んだ（変数を分離するごとに新しい分離定数が現れる）．したがって，Helmholtz の方程式を解くには，二つの常微分方程式

$$r^2R''+rR'+(\lambda^2r^2-n^2)R=0 \quad (0<r<1)$$
$$R(0)<\infty \quad \text{(物理的条件)}$$

$$R(1)=0$$

$$\Theta''+n^2\Theta=0$$

を解かなければならない．

Bessel の方程式

方程式

$$r^2R''+rR'+(\lambda^2r^2-n^2)R=0$$

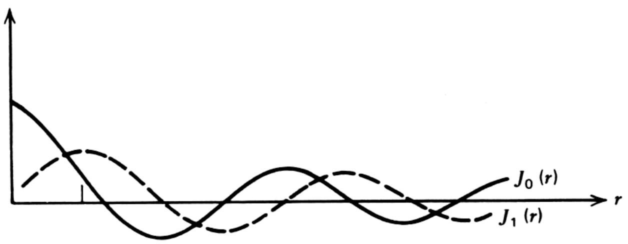
は常微分方程式論においてよく知られている．それは **Bessel の方程式**と呼ばれ，二つの線形独立な解をもつ．それらは

$$R_1(r)=AJ_n(\lambda r) \quad n \text{ 次の第 1 種 Bessel 関数}$$

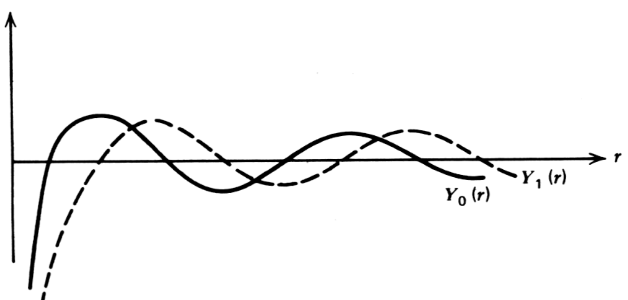
$$R_2(r)=BY_n(\lambda r) \quad n \text{ 次の第 2 種 Bessel 関数}$$

である．したがって，この方程式の一般解（すべての解）は

$$R(r)=AJ_n(\lambda r)+BY_n(\lambda r)$$



第 1 種Bessel関数



第 2 種Bessel関数

図 30.2 Bessel 関数

と表される．この解は方程式に含まれる n と λ に関係していることに注意せよ．これらの関数のグラフはよく知られており，参考文献表の中の参考書 2 に書いてある．図 30.2 も見よ．

関数 $J_n(\lambda r)$ と $Y_n(\lambda r)$ を求めるには Frobenius（フロベニウス）の方法というものを使わなければならない．この方法は解 $R(r)$ をべき級数の形で求める方法である．それによると，二つの線形独立なべき級数 $J_n(\lambda r)$ と $Y_n(\lambda r)$ が求まる*．関数 $Y_n(\lambda r)$ は $r=0$ で有界でないから，われわれの解としては

$$R(r)=AJ_n(\lambda r)$$

を選ばなければならない．

$R(r)$ を求める最後のステップは，境界条件 $R(1)=0$ を使って λ を定めることである（係数 A は無関係である）．$R(1)=0$ を $R(r)=AJ_n(\lambda r)$ に代入すると

$$J_n(\lambda)=0$$

が得られる．いいかえれば，$R(r)$ を円の境界上で零にするには，分離定数 λ を $J_n(\lambda)=0$ の根の一つであるように選ばなければならない．つまり

$$\lambda=k_{nm}$$

である．ここで，k_{nm} は $J_n(r)=0$ の m 番目の根である．これらの根の表はよく知られており，計算機のプログラムを使ってこれを求めることもできる．表 30.1 にこれらの根を表にして示す．

表 30.1　$J_n(r)=0$ の m 番目の根

m \ n	0	1	2	3	4
1	2.40	3.83	5.13	6.38	7.59
2	5.52	7.02	8.42	9.76	11.06
3	8.65	10.17	11.62	13.02	14.37
4	11.79	13.32	14.80	16.22	17.62
5	14.93	16.47	17.96	19.41	20.83
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

これらの根を利用できるのだから，Helmholtz の固有値問題は解けたわけである．固有値 λ は k_{nm} であり，対応する固有関数 $U_{nm}(r,\theta)$ は

★　$$U_{nm}(r,\theta)=J_n(k_{nm}r)[A\sin(n\theta)+B\cos(n\theta)]$$
$$(n=0,1,2,\cdots,\quad m=1,2,3,\cdots)$$

* **訳注：** n が整数のときは $Y_n(\lambda r)$ は単なるべき級数ではなく r の対数関数も含む．しかし，$Y_n(\lambda r)$ が $r=0$ で有界でないことは確かである．

である．図 30.3 に，n と m のいろいろな値に対して，これらの関数のグラフを描いてある．

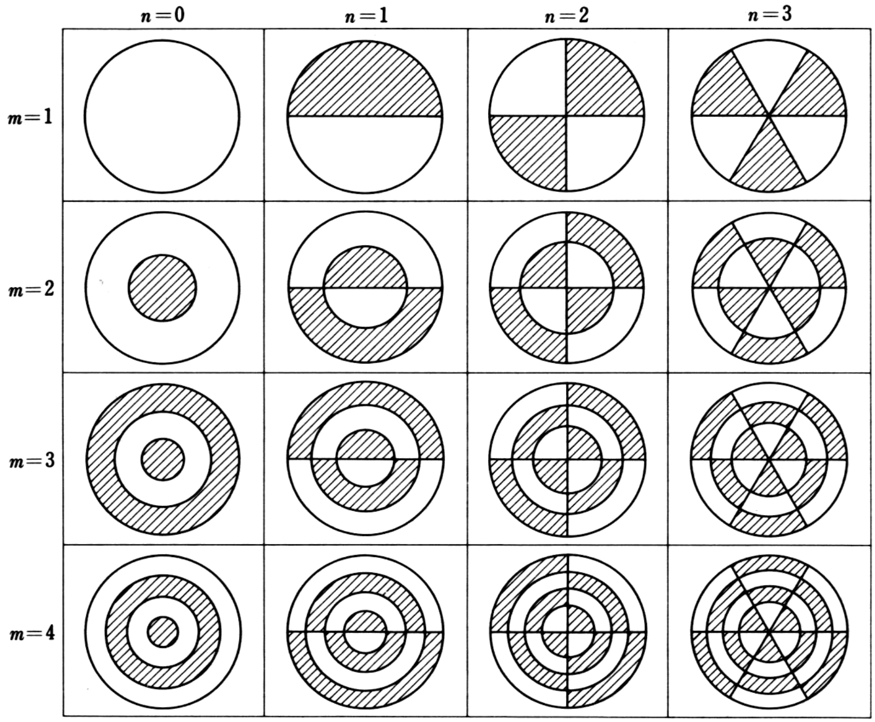


図 30.3 円形の太鼓の膜の基本振動；実線は振動の節を示す

定数 A と B が異なる値をとっても $U_{nm}(r, \theta)$ の一般的な形は同じである．A, B の選び方によって振動の高さと $\theta=0$ の位置とだけが影響を受ける．

各 $U_{nm}(r, \theta)$ は周波数

$$f_{nm}=k_{nm}c/2\pi \ \text{Hz}$$

の円形太鼓膜の**基本振動**を表す．これらの**周波数**は時間に関する方程式

$$T''+k_{nm}^2c^2T=0$$

を解くことによって得られる．すなわち，その解は

$$T_{nm}(t)=A\sin(k_{nm}ct)+B\cos(k_{nm}ct)$$

である．これは周波数

$$f_{nm}=k_{nm}c/2\pi \text{ Hz}$$

の単振動である．

基本振動 $U_{01}(r,\theta)$ と $U_{nm}(r,\theta)$ との周波数の比が

$$\frac{f_{nm}}{f_{01}}=\frac{k_{nm}}{k_{01}}$$

であることに注目すると面白い．この比は，1次元波動方程式のときのように整数ではない．つまり，太鼓の膜の高次の振動は基本周波数の倍音ではない．また，図の第 m 行の振動の節（振動が生じない点）が作る円の半径は

$$\frac{k_{n1}}{k_{nm}},\ \frac{k_{n2}}{k_{nm}},\ \frac{k_{n3}}{k_{nm}},\ \cdots,1$$

であることにも注意せよ．

さて，Helmholtz の方程式を解いて基本的な形 $U(r,\theta)$ を求めたので，時間の関数の因子

$$T_{nm}(t)=A\sin(k_{nm}ct)+B\cos(k_{nm}ct)$$

を掛けて初期条件を満足するように積和を作ることが最後のステップとして残されている．すなわち，解は

★
$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n(k_{nm}r)\cos(n\theta+\varphi_{n,m})\times[A_{nm}\sin(k_{nm}ct)+B_{nm}\cos(k_{nm}ct)]$$

と書けるはずである．定数を A_{nm}, B_{nm}, $\varphi_{n,m}$ という形にまとめたことにも注意せよ（細かな技巧的なところである）．

一般の場合に A_{nm}, B_{nm}, φ_{nm} をどう求めるかという複雑な問題には入らず，むしろ u が θ に関係しない場合（ごく普通の場合）の解を求めてみよう．すなわち，太鼓の膜の初期位置が r だけに関係すると仮定しよう．特に，

$$u(r,\theta,0)=f(r)$$
$$u_t(r,\theta,0)=0$$

である場合を考えよう．（$u_t\neq 0$ の場合を扱うのも特に難しくはない．）このような仮定の下での解の形は

(30.1)★
$$u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_0(k_{0m}r)\cos(k_{0m}ct)$$

となるので，われわれの目標は

(30.2)
$$f(r)=\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_0(k_{0m}r)$$

となるような A_m を求めることとなる ($u_t=0$ は何の条件も与えない．ただ $0=0$ となるだけである)．定数 A_m を求めるために，Bessel 関数 $\{J_0(k_{0m}r):m=1,2,\cdots\}$ の直交性の条件

$$\int_0^1 rJ_0(k_{0i}r)J_0(k_{0j}r)dr=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ \dfrac{1}{2}J_1{}^2(k_{0i}) & (i=j)\end{cases}$$

を使う（この積分の公式は Bessel 関数の本に書いてある)．式 (30.2) の両辺に $rJ_0(k_{0j}r)$ を掛けて 0 から 1 まで積分すると

$$A_j\int_0^1 rJ_0{}^2(k_{0j}r)dr=\int_0^1 rf(r)J_0(k_{0j}r)dr$$

が得られる．これを解いて A_j を求めることができる：

(30.3)★ $$A_j=2\int_0^1 rf(r)J_0(k_{0j}r)dr/J_1{}^2(k_{0j})\quad (j=1,2,\cdots)$$

太鼓の膜の振動の解（θ に関係しない）は式 (30.1) であり，その係数は式 (30.3) で与えられる．

この解は読者が思うほど複雑ではない．これは，初期条件 $f(r)$ を

$$f(r)=A_1J_0(k_{01}r)+A_2J_0(k_{02}r)+A_3J_0(k_{03}r)+\cdots$$

という和の形に展開して，各項に振動因子 $\cos(k_{0m}ct)$ を挿入したもの

$$u(r,t)=A_1J_0(k_{01}r)\cos(k_{01}ct)+A_2J_0(k_{02}r)\cos(k_{02}ct)+\cdots$$

と解釈できる．たとえば，初期条件

$$u(r,\theta,0)=J_0(2.4r)+0.5J_0(8.65r)$$
$$u_t(r,\theta,0)=0$$

の下での太鼓の膜の振動の解は

$$u(r,t)=J_0(2.4r)\cos(2.4ct)+0.5J_0(8.65r)\cos(8.65ct)$$

となる．

$J_0(k_{01}r),\ J_0(k_{02}r),\cdots$ の意味

解が関数 $J_0(k_{01}r)$，$J_0(k_{02}r),\cdots$ の和の形に書かれるので，これらの関数 $J_0(k_{01}r)$，$J_0(k_{02}r),\cdots$ の意味を知っておくことは役に立つことであろう．まず $J_0(r)$ のグラフを描くことから始めよう（図 30.4)．

ところで，関数 $J_0(k_{01}r)$，$J_0(k_{02}r),\cdots,J_0(k_{0m}r)$ のグラフを描くために，m 番目の根が $r=1$ を通過するように r 軸の目盛を変更する（図 30.5)．

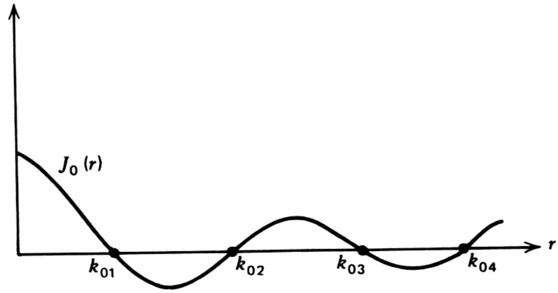


図 30.4　0 次の Bessel 関数 $J_0(r)$

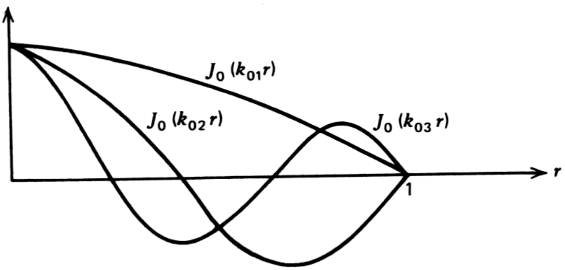


図 30.5　$J_0(k_{0m}r)$ のグラフ（太鼓の膜の振動の基本構成要素）

注意

1. 円形の太鼓の膜（$c=1$）に初期条件

$$\text{初期条件}\begin{cases} u(r,\theta,0)=J_0(2.4\,r)+0.10\,J_0(5.52\,r) \\ u_t(r,\theta,0)=0 \quad \text{（初速零）} \end{cases}$$

で指定されるだけの変位を与えるとしよう．図 30.6 を見よ．

一般に，なすべきことは，初期位置 $f(r)$ を基本の形 $J_0(k_{0m}r)$ の和に展開し，それぞれの振動を観察し，それからそれらを足し合わせることである．太鼓の膜の振動に関する基本的な物理原理は，基本の形 $J_0(2.4\,r)$, $J_0(5.52\,r), \cdots, J_0(k_{0m}r), \cdots$ のそれぞれが独自に単純調和振動（太鼓の膜の各点が同じ周波数で振動する）を引き起こすということである．ここでは，初期条件が二つの基本の形の和であるから，太鼓の膜の振動はその形

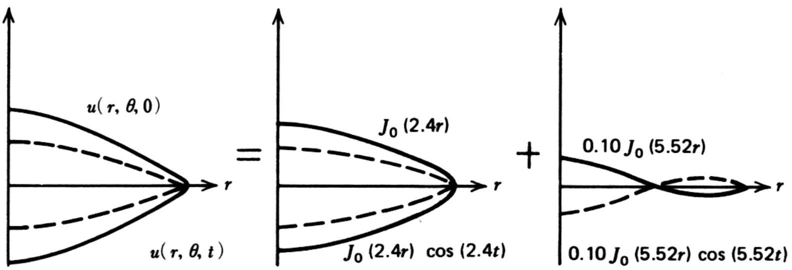


図 30.6 初期条件を基本の形に分解する

が引き起こす二つの単純調和振動の和になる．つまり，

$$u(r,t)=J_0(2.4r)\cos(2.4t)+0.10J_0(5.52r)\cos(5.52t)$$

である．これら二つの振動を重ね合わせたものは複雑な振動となって，高い方の周波数は低い方の周波数の整数倍ではないということに注意せよ．

2. 初期条件 $u=f(r)$，$u_t=0$ での太鼓の膜の振動の解は次のように解釈できる．まず初期条件 $f(r)$ を基本構成要素 $A_mJ_0(k_{0m}r)$ の和に展開し，それぞれを固有の周波数 $k_{0m}c$ で振動させると，基本の振動が

$$A_mJ_0(k_{0m}r)\cos(k_{0m}ct)$$

となる．それらを足し合わせて初期条件 $f(r)$ に対する振動が得られる．

練習問題

1. $u(r,\theta,t)=U(r,\theta)T(t)$ を波動方程式

$$u_{tt}=c^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right)$$

に代入して，二つの方程式

$$\nabla^2U+\lambda^2U=0$$
$$T''+\lambda^2c^2T=0$$

に分離せよ．

2. $U(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$ を Helmholtz の境界値問題

$$\nabla^2U+\lambda^2U=0$$
$$U(1,\theta)=0$$

に代入して

$$r^2R''+rR'+(\lambda^2r^2-n^2)R=0$$

$$R(1)=0$$

$$\Theta''+n^2\Theta=0$$

という分離形を作れ．分離定数を $0, 1, 2, \cdots$（これを n^2 と呼ぶことにする）に選ぶ理由は何か．

3.　偏微分方程式　$u_{tt}=\nabla^2 u \quad (0<r<1)$

境界条件　$u(1, \theta, t)=0 \quad (0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(r, \theta, 0)=1-r^2 \\ u_t(r, \theta, 0)=0 \end{cases} \quad (0\leqslant r\leqslant 1)$

を解け．

4.　偏微分方程式　$u_{tt}=\nabla^2 u \quad (0<r<1)$

境界条件　$u(1, \theta, t)=0 \quad (0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(r, \theta, 0)=J_0(2.4r) \\ u_t(r, \theta, 0)=0 \end{cases} \quad (0\leqslant r\leqslant 1)$

を解け．

5. 太鼓の膜の初期位置が $u(r, \theta, 0)=J_0(2.4r)-0.5J_0(8.65r)+0.25J_0(14.93r)$ であったとして，練習問題 4 を解け．振動の最高周波数は何か．

6. $0\leqslant r\leqslant 1$ の範囲で次の関数のグラフを描け：

（a）　$J_0(5.52r)$

（b）　$J_0(14.93r)$

参考書

1. R. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, MacMillan, 1963. 例をたくさん含んだ包括的な教科書で，技術者や物理学者にとって大変ためになる本である．この本では四角い太鼓の膜の振動の問題を解いている．特に，その 5.3 章を見よ．

2. E. Jahnke, F. Emde, *Tables of Functions with Formulas and Curves*, Dover, 1945. 最もよく知られた数表の一つ．Bessel 関数の根も表になっている．

第4部

楕円型の問題

第31課　ラプラシアン(直観的記述)

目的：　ラプラシアンというものの直観的な意味を述べ，いろいろな座標系に関してラプラシアンがどんな形をしているかを示すこと．２次元と３次元の最も普通の座標系に関するラプラシアンは次の通りである：

$$\left.\begin{array}{ll}\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} & \text{直交直線座標（デカルト座標）}\\ \nabla^2 u = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} & \text{極座標}\end{array}\right\}\text{（２次元）}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} & \text{直交直線座標（デカルト座標）}\\ \nabla^2 u = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} & \text{円柱座標}\\ \nabla^2 u = u_{rr} + \dfrac{2}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\phi\phi} + \dfrac{\cot\phi}{r^2}u_\phi + \dfrac{1}{r^2\sin^2\phi}u_{\theta\theta} & \text{球座標}\end{array}\right\}\text{（３次元）}$$

座標変換の問題を非常に難しいと感じる学生がいるので，ラプラシアンをいろいろな座標系に変換するとき使われる合成関数の微分の法則についても話をする．

ラプラスの演算子（ラプラシアン）

(31.1)
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

は物理学の中で恐らく一番重要な演算子であろう．問題は，それが何を意味するのか，三つの２次微分の和がなぜ自然法則と関係があるのか，という点である．それに対する答えは，関数のラプラシアンを作ることによって，ある点での関数の値とその近傍の点での関数の値との比較ができるという事実にある．それは，１次元で２次微分が果たしていた役割をより高次元に一般化したものであると考えることができる．ところで，ラプラシアンがなぜそんなに有用なものなのかということの根本の意味を考えてみよう．

2次元での ∇^2 の意味

1. ある点 (x, y) で $\nabla^2 u > 0$ ならば，$u(x, y)$ はその近傍の点（たとえば (x, y) の周りの円上）における u の平均値より小さい．
2. (x, y) で $\nabla^2 u = 0$ ならば，$u(x, y)$ はその近傍の点における u の平均値に等しい．
3. (x, y) で $\nabla^2 u < 0$ ならば，$u(x, y)$ はその近傍の点における u の平均値より大きい．

これらの原理を使うと，物理学におけるいくつかの基本的な偏微分方程式の解釈をすることができる．

いくつかの基本的な物理法則の直観的意味

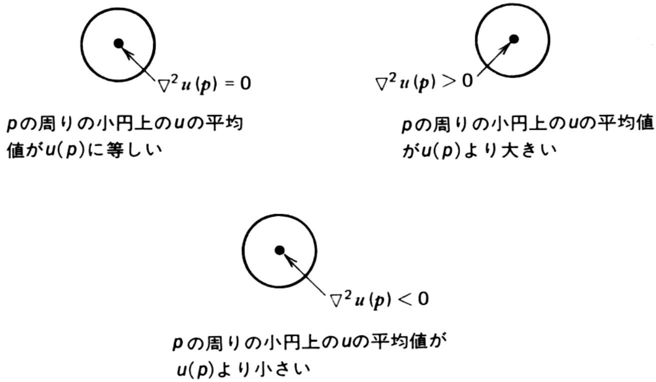
熱伝導方程式 $u_t = \alpha^2 \nabla^2 u$ は温度（あるいは濃度）u を問題にしているが，この式は温度（あるいは濃度）の時間に関する変化率 u_t が $\nabla^2 u$ に比例するということを述べていると解釈できる．すなわち，ある点の温度がその点の周りの円上の温度の平均より低ければ，その点の温度は上昇するということを述べている．

波動方程式 $u_{tt} = \alpha^2 \nabla^2 u$ は太鼓の膜の変位（たとえば）を問題にしているが，太鼓の膜上の一点の加速度（あるいは力）u_{tt} が $\nabla^2 u$ に比例するということを表しているものと解釈できる．すなわち，ある点での太鼓の膜がその近傍の平均より（高さが）低ければ，その点での太鼓の膜は上向きの加速度（力が上向き）を受ける．

Laplaceの方程式 $\nabla^2 u = 0$ は，解 u が常にその近傍の平均に等しいことを表している．たとえば，定常状態でぴんと張ったゴム膜（動いていない）は Laplace の方程式を満たす．したがって，任意の点の膜の高さはその点の周りの円上の膜の平均の高さに等しい．図 31.1 はラプラシアンの意味を説明している．

Poisson の方程式 $\nabla^2 u = f$．ここで，f は空間変数だけの関数である（定数でもよい；いろいろな現象がこれで表される）．

1. $\nabla^2 u = -\rho$ は静電場のポテンシャルを記述している．ここで，ρ は定常電荷密度を表す．ラプラシアンの意味は上でもうわかったので，このポテンシャル場の性質を考えてみよ．



（pは2次元または3次元空間の点）

図 31.1　$\nabla^2 u$ の直観的意味

2. $\nabla^2 u = -g(x,y)$ は熱源 $g(x,y)$ による定常状態の温度 $u(x,y)$ を記述している．ある点で $g(x,y)$ が正ならば，その点で熱が発生する．負の $g(x,y)$ は熱が吸収されることを意味する．
3. $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ は Helmholtz の方程式（あるいは簡約波動方程式）と呼ばれるもので，ぴんと張った太鼓の膜の振動の基本の形（たとえば）を表す．波動方程式あるいは熱伝導方程式から時間因子を分離するとき得られるのがこの方程式である．

以上，ラプラシアン

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} \qquad (2\text{ 次元})$$
$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \qquad (3\text{ 次元})$$

の直観的意味について話をしてきた．しかし，多くの問題において，この式を別の座標系で書き表さなければならないことがある．たとえば，領域の境界が円ならば極座標 (r, θ) を使わなければならないし，3次元で境界が球ならば球座標 (r, θ, ϕ) に移らなければならない．そこで，いろいろな座標系に関してラプラシアンを書き表すにはどうすればよいかということが問題になる．

その前にまず，2次元と3次元の五つの主な座標系について簡単に復習しておこう．それらは

2次元のデカルト（直交直線）座標

　3次元のデカルト（直交直線）座標

　極座標（2次元）

　円柱座標（3次元）

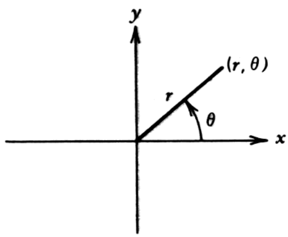
　球座標（3次元）

である．

極座標は次のように定義される：

★

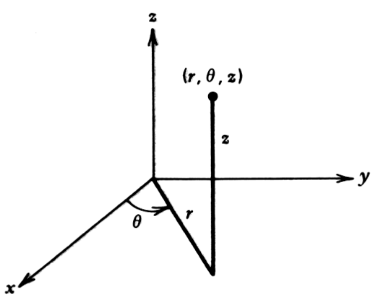
$$r^2=x^2+y^2, \quad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \text{あるいは} \qquad x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta$$



円柱座標は次のように定義される：

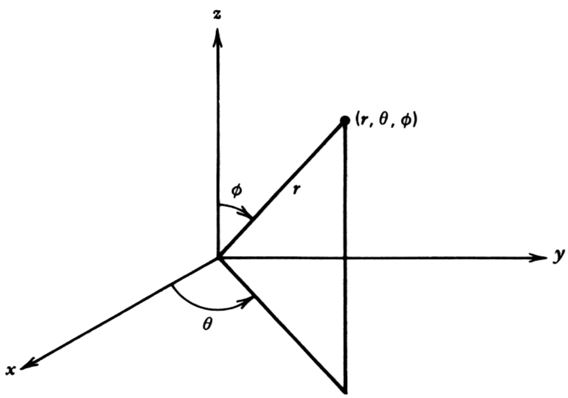
★

$$r^2=x^2+y^2, \quad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}, \quad z=z \qquad \text{あるいは} \qquad x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta, \quad z=z$$



球座標は次のように定義される：

★
$$r^2=x^2+y^2+z^2 \qquad x=r\sin\phi\cos\theta$$
$$\cos\phi=\frac{z}{r} \quad \text{あるいは} \quad y=r\sin\phi\sin\theta$$
$$\tan\theta=\frac{y}{x} \qquad z=r\cos\phi$$



座標系の変換

座標系の変換にとりかかる準備はできた．例として２次元のラプラシアンを極座標に変換してみよう．これが理解できれば任意の座標系から他の座標系への変換ができるはずである．そこで，

$$\nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}$$

から始めよう．新しい座標系におけるラプラシアンを求めるため，まず図 31.2 に示すようなダイアグラムを描こう．

ここの目的は，何が何の関数となっているのかを正確に図示することである．たとえば，図 31.2 のダイアグラムでは，u が二つの新しい変数 r と θ の関数であること，そしてまたこの二つの変数 r と θ がそれぞれ x と y の関数であることを示している（直線は関数関係を表している）．r と θ が一番下にきて x と y が中間にくるようなダイアグラムも書けた．しかし，u_{xx} と u_{yy}

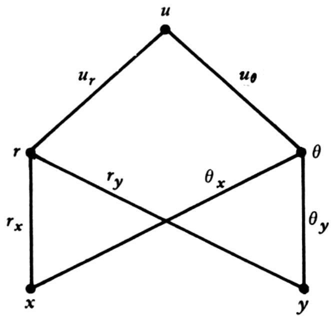


図 31.2 u と (r,θ) と (x,y) との関数関係

の式を導き出したいのであるから，ここにあるダイアグラムの方が相応しい．それでは，どうやって u_{xx} と u_{yy} を r と θ で表せるであろうか．

それはごく簡単にできる．まず u_x と u_y を計算する．ダイアグラムの上で u から x までの道に沿っての偏導関数の積をすべての道について加え合わせることによって u_x が求められる．今の場合，道は二つある．したがって答えは

$$
\begin{aligned}
u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x \\
&= u_r(\cos\theta) - u_\theta(\sin\theta)/r
\end{aligned}
$$

である．このように，おのおのの道に沿っての偏導関数を掛け合わせたものをすべての道について足し合わせるというのが“合成関数の微分の規則”である．同じようにして，

$$
\begin{aligned}
u_y &= u_r r_y + u_\theta \theta_y \\
&= u_r(\sin\theta) + u_\theta(\cos\theta)/r
\end{aligned}
$$

である．

次は2次微分である．まず u_{xx} を求めよう（u_{yy} は読者の練習問題としておく）．しかし，まずもう一つのダイアグラム（図 31.3）を描いておこう．

u が r と θ の関数（そしてさらに r と θ が x と y の関数）であるから，u_x もまた（一般に）同じ変数の関数となるということをきちんと認識しておいてほしい．

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= (u_x)_x \\
&= (u_x)_r r_x + (u_x)_\theta \theta_x \\
&= [u_r\cos\theta - u_\theta(\sin\theta)/r]_r \cos\theta + [u_r\cos\theta - u_\theta(\sin\theta)/r]_\theta(-\sin\theta)/r
\end{aligned}
$$

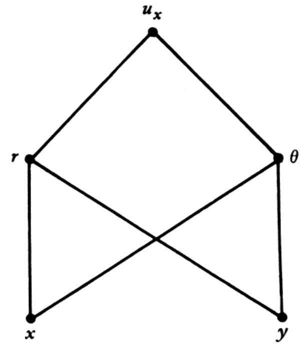


図 31.3　u_x と (r,θ) と (x,y) との関数関係

$$=[u_{rr}\cos\theta-u_{r\theta}(\sin\theta)/r+u_\theta(\sin\theta)/r^2]\cos\theta$$
$$+[u_{r\theta}\cos\theta-u_r\sin\theta-u_{\theta\theta}(\sin\theta)/r-u_\theta(\cos\theta)/r](-\sin\theta)/r$$

同じようにして

$$u_{yy}=[u_{rr}\sin\theta+u_{r\theta}(\cos\theta)/r-u_\theta(\cos\theta)/r^2]\sin\theta$$
$$+[u_{r\theta}\sin\theta+u_r\cos\theta+u_{\theta\theta}(\cos\theta)/r-u_\theta(\sin\theta)/r](\cos\theta)/r$$

である．u_{xx} と u_{yy} を足すと，望む結果

★ $$\nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

が得られる．これが極座標におけるラプラシアンである．これはデカルト（直交直線）座標のラプラシアンと同じ直観的意味をもつが，式の形は異なる．不幸なことに，これは変数係数である．そのため，極座標のラプラシアンを含む方程式はデカルト座標のラプラシアンを含む方程式よりも解きにくい．

3次元ラプラシアン

$$\nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$$

についても同じような計算をしてみる．円柱座標に変換すると

★ $$\nabla^2 u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}$$

である．最後に，球座標についてラプラシアンを書けば

★ $$\nabla^2 u=u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}+\frac{\cot\phi}{r^2}u_\phi+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}u_{\theta\theta}$$

となる.

注意

1. デカルト座標のラプラシアンは唯一の定数係数のラプラシアンである. 他の座標系に関する問題を解くのが難しい理由の一つがこれである. それでも, 変数係数のこれらの式に変数分離法の適用が可能である. ただ, 変数分離の結果得られる常微分方程式が変数係数になる. **Bessel** の方程式, **Legendre**(ルジャンドル) の方程式, その他いわゆる古典的な数理物理のかなり複雑な方程式がたくさんあるが, それらはこのようにして得られるものである. それらの方程式を解くには, 解を無限級数に展開する方法, 特に **Frobenius** の方法, を使わなければならない.
2. ここで述べた以外にもまだたくさんの座標系がある. たとえば, 楕円形の太鼓の膜の振動を調べるには楕円座標系のラプラシアンを書く必要がある. しかし, そうするよりもむしろ他のやり方がある. すなわち, 楕円をわれわれの好みに合う形 (たとえば円のような) に変換し, 変換された問題を新しい座標系 (極座標) を使って解いて, それからさらに元の座標系に変換し戻すという方法である.

練習問題

1. 解 u が r と t だけの関数であることがわかっているとき, 3次元波動方程式 $u_{tt}=\alpha^2\nabla^2u$ は球座標でどういう形に表されるか.
2. 解 u が r と t だけの関数であるとき, 2次元波動方程式 $u_{tt}=\alpha^2\nabla^2u$ は極座標でどういう形に表されるか.
3. u が r だけの関数であるとき, 2次元Laplaceの方程式 $\nabla^2u=0$ は極座標でどういう形に表されるか. この方程式の解は何か. これは2次元における円対称ポテンシャルである.
4. 解 u が r だけの関数であるとき, 3次元Laplaceの方程式は球座標でどういう形に表されるか. この方程式の解を求めることができるか. これは3次元における球対称ポテンシャルである.
5. $u(x,y)=xy$ という面の性質について何がいえるか.
6. 3次元のラプラシアン $\nabla^2u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ を球座標に変換せよ.

参考書

H. A. Davis, *Fourier Series and Orthogonal Functions*, Allyn and Bacon, 1963.
直観的な観点から書かれた優れた教科書で，いろいろな概念について行間の意味まで読者にわかるように述べてある.

第32課　境界値問題の一般的性質

目的：　時間微分を含まない偏微分方程式が自然界のどんな場面で現れるかを説明すること．これらの微分方程式は，双曲型の波動方程式や放物型の熱伝導方程式とは違って初期条件はもたず，境界条件だけをもつ．そのため，これらの問題を境界値問題と呼ぶ．

最も普通の境界条件は次の三つの型である：

1. 第1種の境界条件（Dirichlet 境界条件）
2. 第2種の境界条件（Neumann 境界条件）
3. 第3種の境界条件（Robin 境界条件）

これらの境界条件について説明をし，考え方の例を示す．

今までに論じてきた問題は空間と時間の両方に関して変化する現象を含んでいた．しかし，成り行きが時間的には変化せずただ空間に関してだけ変化するような重要な問題もたくさんある．これらの問題は，大部分が，楕円型境界値問題という形で記述される．この課の目的はこれらの型の問題について述べることである．

時間を含まない偏微分方程式で記述される物理学の問題に共通した状況として次の二つのものがある．すなわち，

1. 定常状態の問題
2. 解の中の時間成分をくくり出した結果として得られる問題

まず，定常状態の問題を眺めよう．

定常状態の問題

熱伝導方程式

$$u_t = \alpha^2 \nabla^2 u$$

の定常状態の解（$t \to \infty$ のときの解）がほしいとしよう．解が時間とともに変

化しないなら $u_t=0$ であることは明白である．したがって，熱伝導方程式は Laplace の方程式

$$\nabla^2 u=0$$

に帰着される．

定常状態という概念の詳しい例として，問題

$$
(32.1)\qquad
\begin{array}{lll}
\text{偏微分方程式} & u_t=u_{xx}+\sin(\pi x) & (0<x<1,\ 0<t<\infty) \\
\text{境界条件} & \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} & (0<t<\infty) \\
\text{初期条件} & u(x,0)=\sin(3\pi x) & (0\leqslant x\leqslant 1)
\end{array}
$$

を考えよう．定常状態の解 $u(x,\infty)$（もし存在するなら）を求めるため，$u_t=0$ とおいて境界値問題

$$\frac{d^2u}{dx^2}=-\sin(\pi x)\quad(0<x<1)$$

$$u(0)=0$$

$$u(1)=0$$

を解こう．この場合，解は

$$u(x,\infty)=\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)$$

である。問題 (32.1) をきちんと解いたら，$u(x,t)$ は t が小さいうちは $\sin(3\pi x)$ に近いが，しかし，t が大きくなるにつれて段々と

$$\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)$$

に似てくるであろう．定常状態が零であるような問題も，それが零ではないような問題もあるし，定常解が存在しないような問題もあるし，また，定常状態が正弦振動であって $u_t, u_{tt}, \cdots$ を零に等しいとおくのが必ずしも適当でないような問題もある．われわれは自分が考えている問題の“物理”について一定の知識をもっていなければならない．

双曲型の問題と放物型の問題の時間成分をくくり出すこと

円形の太鼓の膜の問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{偏微分方程式} & u_{tt}=\nabla^2 u & (0<r<1) \\
\text{境界条件} & u=0 & (\text{円上で}) \\
\text{初期条件} & \begin{cases} u(r,\theta,0)=f(r,\theta) \end{cases} &
\end{array}
$$

$$u_t(r,\theta,0)=g(r,\theta)$$

において，われわれは $u(r,\theta,t)=U(r,\theta)T(t)$ という形の解を探した．そして，それから Helmholtz の境界値問題

$$\text{偏微分方程式}\quad \nabla^2U+\lambda^2U=0$$
$$\text{境界条件}\quad U(1,\theta)=0$$

を得た．これは，解が形を表す因子 $U(r,\theta)$ と時間因子 $T(t)$ の積の形に表されるような偏微分方程式に共通した状況である．実際，熱伝導方程式

$$u_t=\nabla^2u$$

においても，時間成分をくくり出すと，同じく Helmholtz の方程式が得られる．

境界値問題を学ぶ際，最も普通に遭遇する境界条件としては次の三つの型のものがある．それらについて検討しよう．

境界値問題における境界条件の三つの主な型

第1種の境界値問題（Dirichlet（ディリクレ）問題）

空間のある与えられた領域で偏微分方程式が成り立ち，その領域の境界上での解の値が指定される場合である．その一つの例として，境界上で温度が与えられたときに領域内の定常温度分布を求める問題がある．もう一つの例としては，境界上でポテンシャルが与えられたときに領域内部のポテンシャルを求める問題がある．以下にもっと他の例も挙げよう．

Dirichlet 問題の例

円周上での解の値が与えられているとして，円の内部での Laplace の方程式を考えよう：

$$\text{偏微分方程式}\quad u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\quad(0<r<1)$$
$$\text{境界条件}\quad u(1,\theta)=\sin\theta\quad(0\leqslant\theta<\pi)$$

図 32.1 を見よ．

もう一つの例が外部 Dirichlet 問題である．これは，単位円の外側での Laplace の方程式の解を求める問題である．円周上では解の値が与えられている（図 32.2）．

Dirichlet 問題は静電気学によく現れる．領域の境界上でポテンシャルが与

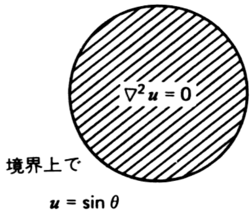


図 32.1　内部 Dirichlet 問題

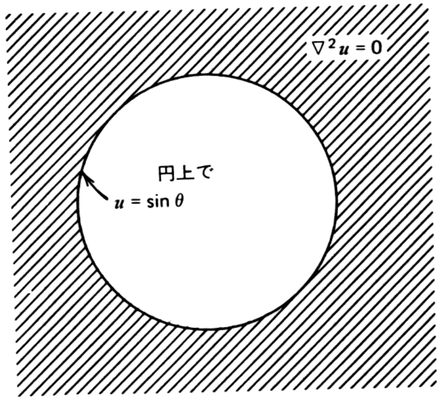


図 32.2　外部 Dirichlet 問題

えられているときに領域内のポテンシャルを求めたいときなどである.

第 2 種の境界値問題 (Neumann (ノイマン) 問題)

空間のある領域で偏微分方程式が成り立つというところは前と同じであるが, 今度は境界上で外向き法線方向の微分 $\partial u/\partial n$ (これは内向き流束に比例する) が指定されているという場合である. この問題は, 境界上での流束 (熱エネルギー, 電子, などの) が与えられているときの定常状態の熱流や静電気の話としてよく現れる.

たとえば, 円の周上で内部への熱の流れが

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sin\theta$$

に従って変化するものとしよう．円内部の定常状態の温度は境界値問題

$$\nabla^2 u=0 \qquad (0<r<1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\sin\theta \quad (r=1,\ 0\leqq\theta<2\pi)$$

の解として与えられる．この場合，境界をよぎる熱の流束 (J/m·s) は $0\leqq\theta<\pi$ では内向き，$\pi\leqq\theta<2\pi$ では外向きであることがわかる（図 32.3）．

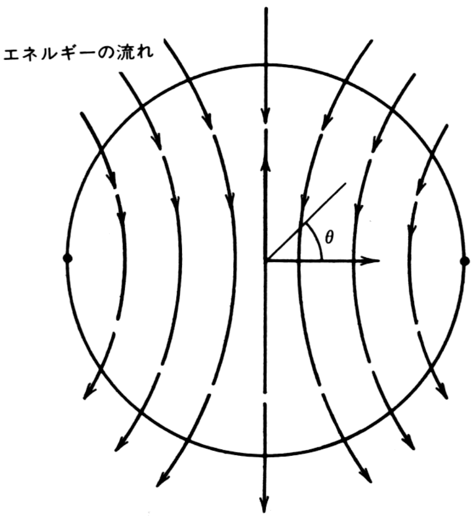


図 32.3 Neumann 問題に対する熱流

しかし，全流束が

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}d\theta=\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta=0$$

（Neumann 問題に対して常に成り立つはずの条件）であるから，円内部の各点での温度は時間に関して変化しないといえる．

いいかえれば，Neumann 問題が意味をもつのは，境界をよぎる熱（あるいはその他何であっても）の正味増加率が零である場合に限る．数学的には，境

界を一周しての積分

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds=0 \quad (ds \text{ は境界 } C \text{ に沿っての線素})$$

が成り立たなければならない．そうでないと，この問題には解がなくなる。たとえば，内部 Neumann 問題

$$\nabla^2 u=0 \qquad (0<r<1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta)=1 \quad (r=1,\ 0\leqslant\theta<2\pi)$$

は物理的な意味をもたない．なぜならば，1という一定の内向き流束があったのでは定常状態の解は出ないから．

Neumann 問題は，解が一意に定まらないという意味で，他の境界条件とはいくぶん異なっている．つまり，Neumann 問題

$$\nabla^2 u=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta)=\cos(2\theta) \quad (r=1,\ 0\leqslant\theta<2\pi)$$

（境界をよぎる全流束が零であることに注意せよ）は無限個の解 $u(r,\theta)$ をもつ．しかし，一つの解が得られれば，他の解は定数を足すだけで得られる．たとえば，上の Neumann 問題の一つの解が

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}r^2\cos(2\theta)$$

であるから，この解に定数を加えるともう一つ別の解が得られることは明らかである．こういうわけで，Neumann 問題の解を一つに定めたいときには追加情報（たとえばある点での解の値など）が必要である．

第3種の境界値問題

第3種の境界値問題では，空間のある領域で偏微分方程式が与えられているが，その境界上の条件は上記2種類の混合である：

$$\frac{\partial u}{\partial n}+h(u-g)=0$$

ここで，h は定数（問題ごとに与えられるデータ），g は与えられた関数で境界上で変化しうる．この境界条件をもっと意味がわかりやすい形に書くと

$$\frac{\partial u}{\partial n}=-h(u-g)$$

となる．これは，境界をよぎる内向きの流束が温度 u と，ある指定された温度

g との差に比例することを表している．この意味は

1. 温度 u （境界上での）が指定された境界の外側の温度より高ければ熱流は外向きである．
2. u が境界の外側の温度 g より低ければ熱流は内向きである．

もちろん，これは Newton の冷却の法則に他ならない．したがって，この型の境界条件は定常状態の熱流においてごく自然なものである．

例

単位円のすぐ外側の温度が $g(\theta)=\sin\theta$ と与えられているとする．この場合，境界をよぎる熱流は

$$\frac{\partial u}{\partial r}=-h(u-\sin\theta)\quad(r=1,\ 0\leqslant\theta<2\pi)$$

で与えられる．円の内部の定常状態の温度を求めるには，境界値問題

(32.2)
$$\begin{aligned}&\text{偏微分方程式}\quad \nabla^2 u=0\quad(0<r<1)\\&\text{境界条件}\quad \frac{\partial u}{\partial r}+h(u-\sin\theta)=0\quad(0\leqslant\theta<2\pi)\end{aligned}$$

を解かなければならない．定数 h は物理的パラメータで，u と $\sin\theta$ の温度差1度あたりの境界をよぎる熱流の量を表す（境界の接触状況に依存して定まる定数であるので測定するのは容易ではない）．h が大きければ，温度差1度あたりの熱流が大きく，したがって解は，境界条件 $u=g=\sin\theta$ の Dirichlet 問題の解に似てくる．一方，$h=0$ であると，境界条件は絶縁境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial r}=0$$

になってしまう．

h が 0 から ∞ に変化するにつれて問題 (32.2) の解がどう変わるかは読者にも想像がつこう．$h=0$ のときは，境界は完全に絶縁され，したがって解 $u(r,\theta)$ は定数である（この解は一意に定まるわけではない；どんな定数でもよい）．h がどんどん大きくなるにつれて，解は境界条件が $u=\sin\theta$ の Dirichlet 問題の解に次第に似てくる．$h>0$ でかつ零に非常に近いときには，解はほとんど零（境界上での $\sin\theta$ の平均）に等しくなるであろう．

練習問題

1. 直観に基づいて，Dirichlet 問題

偏微分方程式　$\nabla^2 u=0 \quad (0<r<1)$

境界条件　$u(1,\theta)=\sin\theta \quad (0\leqslant\theta<2\pi)$

の解を求めることができるか.

2. 次の Neumann 問題は円の内部で解をもつであろうか.

偏微分方程式　$\nabla^2 u=0 \quad (0<r<1)$

境界条件　$\dfrac{\partial u}{\partial r}=\sin^2\theta$

3. h のいろいろな値に対して,

偏微分方程式　$\nabla^2 u=0 \quad (0<r<1)$

境界条件　$\dfrac{\partial u}{\partial r}+h(u-\sin\theta)=0$

の解 $u(r,\theta)$ がどのようになるかを想像せよ.

4. 偏微分方程式　$u_{tt}=u_{xx}-u_t+u \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty)$

初期条件　$\begin{cases} u(x,0)=\sin(3\pi x) \\ u_t(x,0)=0 \end{cases} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$

の定常状態の解を求めるには, どのような境界値問題を解けばよいか.

5. ラプラシアンの物理的意味がすでにわかっているので, それから Helmholtz の境界値問題

偏微分方程式　$\nabla^2 u=-\lambda^2 u \quad (0<r<1)$

境界条件　$u(1,\theta)=0 \quad (0\leqslant\theta<2\pi)$

の解の一般的性質がどうなるかを考えよ.

6. 次の正方形の中の**混合型境界値問題**の物理的意味は何か.

偏微分方程式　$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad (0<x<1,\ 0<y<1)$

境界条件　$\begin{cases} u_y(x,0)-h[u(x,0)-2]=0 \\ u(x,1)=1 \end{cases} \quad (0<x<1)$
$\begin{cases} u_x(0,y)=0 \\ u_x(1,y)=0 \end{cases} \quad (0<y<1)$

参考書

Tyn Myint-U, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Elsevier, 1973. この本の第 8 章には境界値問題の優れた問題集がついている.

第33課　円に対する内部 Dirichlet 問題

目的：　円に対する内部 Dirichlet 問題

$$\text{偏微分方程式}\quad u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\quad(0<r<1)$$

$$\text{境界条件}\quad u(1,\theta)=g(\theta)\quad(0\leqslant\theta<2\pi)$$

の変数分離による解法を示すこと．その解は，境界上の関数を

$$g(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

のように展開して，問題

$$\begin{array}{l|l} \nabla^2 u=0 & \nabla^2 u=0 \\ u(1,\theta)=\sin(n\theta) & u(1,\theta)=\cos(n\theta) \end{array}$$

の解を別々に求めるものであると解釈できる．上の二つの問題は解

$$u(r,\theta)=r^n\sin(n\theta)\quad|\quad u(r,\theta)=r^n\cos(n\theta)$$

をもつから，内部 Dirichlet 問題の解は

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

である．この級数解を得たら，次にそれに代数操作を少し加えて，解の別の表し方すなわち積分形を求める．この新しい形，すなわち Poisson（ポアソン）の積分解，はある興味ある考え方をもたらす．

この課では，Dirichlet 問題

(33.1)
$$\text{偏微分方程式}\quad u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\quad(0<r<1)$$

$$\text{境界条件}\quad u(1,\theta)=g(\theta)\quad(0\leqslant\theta<2\pi)$$

の解法に関連した新しい考え方をたくさん示す．変数分離法は普通のやり方であるが，それによる級数の形の解を求めてから，その解の式を少しいじって，別の形の式（Poisson の積分公式）を得る．

問題 (33.1) は物理における応用の中で非常に大切である．それは，円の周上でポテンシャルが与えられているとき円の内部の静電ポテンシャルを求める問題であると解釈できる．もう一つの解釈として，石けん膜のモデルがある．円形の針金の輪を歪ませ（その歪みを $g(\theta)$ で表す）石けん液の中に浸すと，石けん膜が針金の中側にできる．変位 $g(\theta)$ が小さければ，膜の高さは問題 (33.1) の解で表される．

読者は，図 33.1 に概略を図示してある変数分離の技法によく注意を払って，詳しい計算を自分で実行してみてほしい（練習問題 1）．

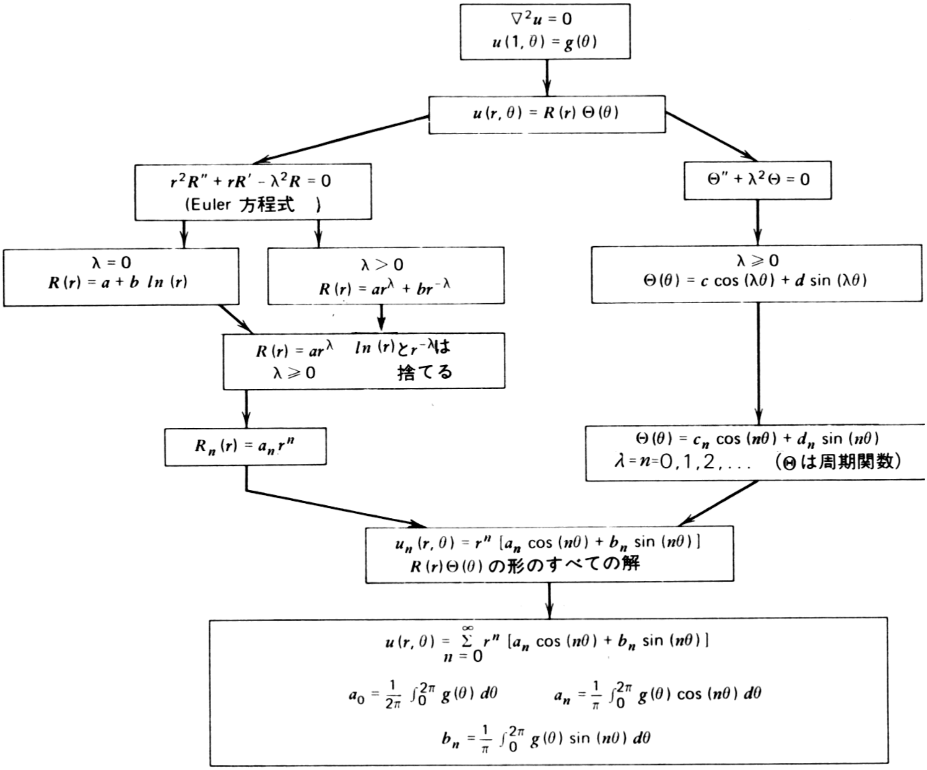


図 33.1　内部 Dirichlet 問題の解の概略

図 33.1 に二三の注釈を加えておく．

1. 分離定数が非負でなければならない（λ^2 と記したのはこのためである）ことを確かめておくこと．分離定数が負であったら，関数 $\Theta(\theta)$ が周期的でなくなる．また，もしそれが零であったら，解 $R(r)=a+b\ln r$ の中の $\ln r$ の項を捨てることになる．
2. 定数 a_n と b_n の定め方を知っておくこと．

要するに，内部 Dirichlet 問題（33.1）の解は

(33.2)★
$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

である．この解をもう一つの形に書き変える前に，いくつかの注意をしよう．

Dirichlet 解についての注意

1. 解（33.2）の意味は，境界での関数 $g(\theta)$ を Fourier 級数

$$g(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

に展開し，級数の中の sin と cos のそれぞれについての問題を解くべきであるということである．各項の解は $r^n\sin(n\theta)$ および $r^n\cos(n\theta)$ であるから，（重ね合わせにより）

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

であるといえる．

2. 偏微分方程式　$\nabla^2 u=0\quad(0<r<1)$

境界条件　$u(1,\theta)=1+\sin\theta+\dfrac{1}{2}\sin(3\theta)+\cos(4\theta)$

の解は

$$u(r,\theta)=1+r\sin\theta+\frac{r^3}{2}\sin(3\theta)+r^4\cos(4\theta)$$

である．ここでは，$g(\theta)$ はすでに Fourier 級数の形をしている．つまり

$$a_0=1\qquad\qquad b_1=1$$
$$a_4=1\qquad\qquad b_3=0.5$$
$$\text{他のすべての }a_n=0\qquad\qquad \text{他のすべての }b_n=0$$

したがって，a_n と b_n を計算する公式を使う必要はない．

3. 円の半径が任意（たとえば R）であるなら，解は

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

となる．

4. 解 (33.2) の定数項 a_0 は $g(\theta)$ の平均

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\theta)d\theta$$

を表すことに注意せよ．

これで変数分離の解についての話を終わる．さてこれから Poisson の積分公式という興味ある公式に入ろう．

Poisson の積分公式

変数分離の解

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

(円の半径は任意にとる) をまず書いて，それに係数 a_n と b_n の表現式を代入する．代数学，微積分学，三角法などの知識を使って計算を少々実行すると次式が得られる：

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\theta)d\theta+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\int_0^{2\pi}g(\alpha)[\cos(n\alpha)\cos(n\theta)\\&\qquad+\sin(n\alpha)\sin(n\theta)]d\alpha\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos[n(\theta-\alpha)]\right\}g(\alpha)d\alpha\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n[e^{in(\theta-\alpha)}+e^{-in(\theta-\alpha)}]\right\}g(\alpha)d\alpha\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{1+\frac{re^{i(\theta-\alpha)}}{[R-re^{i(\theta-\alpha)}]}+\frac{re^{-i(\theta-\alpha)}}{[R-re^{-i(\theta-\alpha)}]}\right\}g(\alpha)d\alpha\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\alpha)+r^2}\right]g(\alpha)d\alpha\end{aligned}$$

この最後の式がわれわれが求めていたもの，すなわち **Poisson の積分公式**である．つまり，

$$(33.3)\bigstar\quad u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\alpha)+r^2}\right]g(\alpha)d\alpha$$

が，内部 Dirichlet 問題の別解である．

Poisson の積分解についての注意

1. Poisson の積分解(33.3)の意味は，境界ポテンシャル $g(\theta)$ に Poisson 核

$$\text{Poisson 核} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \alpha) + r^2}$$

の重みを掛けた加重平均という形で (r, θ) におけるポテンシャル u が定められるということであると解釈できる．このことは，この問題の物理的構造について重要なことを物語っている．すなわち，ある点でのポテンシャルが近傍でのポテンシャルの加重平均であるという事実を物語っている．Poisson 核は各点にどれだけの荷重を割当てたらよいかを述べている（図 33.2)．

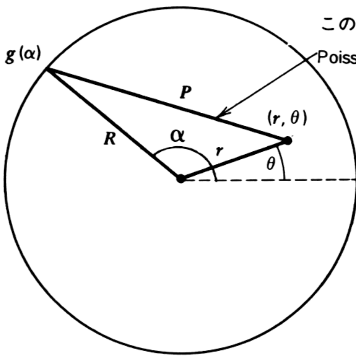


図 33.2　境界ポテンシャルの加重和としての $u(r, \theta)$

Poisson 核の分母は (r, θ) と (R, α) の距離の 2 乗であるから，Poisson 核の値は (r, θ) に近い境界ポテンシャルの値 $g(\alpha)$ に対して大きくなる（図 33.2)．このため，積分は (r, θ) に一番近い $g(\alpha)$ の値により大きな荷重を掛けている．不幸にして，(r, θ) が境界 $r=R$ に極端に近いときには，Poisson 核は (r, θ) に一番近い α に対して非常に大きくなる．そのため，(r, θ) が境界に近いときには，解の数値を計算するためには級数解の方がよい．

2. Poisson 積分により円の中心におけるポテンシャルを計算すると，

$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\alpha)d\alpha$$

となる．つまり，円の中心のポテンシャルは境界のポテンシャルの平均である．

以上で検討を終わる．無雑作に考えると，問題の領域が非常に簡単なので以上のことはそんなに重要な問題ではないと思えるかもしれない．問題の領域が円，正方形，半平面，四半平面，などのとき Laplace の方程式が解きやすいことは確かであるが，注意すべき重要な点が2点ある．

1. 実験者が装置を設計し，自分の好きなどんな形の境界でも作れる場合が多い．
2. これから先，等角写像という名の変換を学ぶことにするが，それによると，複雑な領域を簡単な領域（円のような）に変換できる．したがって，任意の領域における Dirichlet 問題を解くには，領域をまず円に等角的に変換し，次にこの課で求めた解を使い，最後に元の座標系に変換し直せばよい．

注意

1. 境界値問題（非同次偏微分方程式）

偏微分方程式　$\nabla^2 u=f$　（D の内部で）

境界条件　$u=0$　（D の境界上で）

は常に次の方法で解ける：

（a）　$\nabla^2 V=f$ の任意の解 V を探す．（特殊解）

（b）　新しい境界値問題

$\nabla^2 W=0$　（D の内部で）

$W=V$　（D の境界上で）

を解く．

（c）　$u=V-W$ が求める解であることに注意する．

いいかえれば，偏微分方程式の非同次項を境界条件の方へと移すことができる．

2. 境界値問題（非同次境界条件）

偏微分方程式　$\nabla^2 u=0$　（D の内部で）

境界条件　$u=f$　（D の境界上で）

は次の方法で解ける：

（a）　D の境界上で境界条件 $V=f$ を満たす任意の関数 V を探す．

（b）　新しい境界値問題

$$\nabla^2 W=\nabla^2 V \quad (D\ \text{の内部で})$$
$$W=0 \quad (D\ \text{の境界上で})$$

を解く．

（c）　$u=V-W$ がこの問題の解であることに注意する．

いいかえれば，境界条件の非同次項を偏微分方程式の方へと移すことができる．

練習問題

1. 内部 Dirichlet 問題 (33.1) の変数分離による解を求めるための詳しい計算をせよ．詳細な点まで知ることは非常に大切である．なぜなら，次の課で他の形の Dirichlet 問題を解くとき，非常に興味ある相違点に遭遇するから．特に，なぜ分離定数 λ^2 が負であってはいけないのかを知る必要がある．また，$\lambda=0$ のとき，大切な解が捨てられてしまうが，それは何か．図 33.1 の概略の図を見よ．

2. 内部 Dirichlet 問題

偏微分方程式　$u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \quad (0<r<1)$

が次の条件をもつときそれぞれ解はどうなるか：

（a）　$u(1,\theta)=1+\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta$

（b）　$u(1,\theta)=2$

（c）　$u(1,\theta)=\sin\theta$

（d）　$u(1,\theta)=\sin(3\theta)$

解はどのような形をしているか．解は Laplace 方程式を満足するか．

3. 次のような半径 $R=2$ の内部 Dirichlet 問題の解は何か．

偏微分方程式　$\nabla^2 u=0 \quad (0<r<2)$

境界条件　$u(2,\theta)=\sin\theta \quad (0\leqq\theta<2\pi)$

このグラフはどんな形をしているか．

4. 練習問題3で境界条件を $u(2,\theta)=\sin(2\theta)$ に変えたら解はどうなるか．このグラフはどんな形をしているか．

5. 偏微分方程式　$\nabla^2 u=0 \quad (0<r<1)$

境界条件　$u(1,\theta)=\begin{cases}\sin\theta & (0\leqq\theta<\pi)\\ 0 & (\pi\leqq\theta<2\pi)\end{cases}$

を解け．大ざっぱにいって解はどんな形をしているか．

6. $r=3R/4$, $\theta=\pi/2$ のとき，Poisson 核は α $(0\leqslant\alpha<2\pi)$ の関数としてどんな形をしているか．Poisson 核のグラフを描け．
7. この課の“注意 1”を証明せよ．
8. この課の“注意 2”を証明せよ．

参考書

E. C. Young, *Partial Differential Equations : An Introdnction*, Allyn and Bacon, 1972. この教科書には Poisson の積分公式についてのすてきな話がある．

第34課　円環領域における Dirichlet 問題

目的：　二つの同心円で囲まれた領域（円環領域）の Dirichlet 問題

偏微分方程式　$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \quad (R_1<r<R_2)$

境界条件　$\begin{cases} u(R_1,\theta)=g_1(\theta) \\ u(R_2,\theta)=g_2(\theta) \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$

を解くこと．使用する方法は変数分離である．内部 Dirichlet 問題と似ているが，その時は

$$\frac{1}{r^n}\sin(n\theta) \qquad \frac{1}{r^n}\cos(n\theta) \qquad \ln r$$

という解を捨てたのに，今度は捨てないという点が異なる．したがって，解は

$$u(r,\theta)=a_0+b_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_nr^n+b_nr^{-n})\cos(n\theta)+(c_nr^n+d_nr^{-n})\sin(n\theta)\right]$$

となる．また，外部 Dirichlet 問題の解について手短かに述べる．この場合，$r=\infty$ で有界でない項は捨てる．したがって，外部 Dirichlet 問題

偏微分方程式　$\nabla^2u=0 \quad (1<r<\infty)$

境界条件　$u(1,\theta)=g_1(\theta) \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$

は解

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}r^{-n}[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

をもつ．

Dirichlet 問題を解くのに適当な形の領域はたくさんある．その二三を挙げてみるだけでも，次のような Dirichlet 問題がある：

（a）　円の内部（第33課）

（b）　円環領域（本課）

（c）　円の外部（本課）

（d）　球の内部（後の課）

（e）　二つの球の間（後の課）

（f）　2 直線の間（2 次元）

（g）　2 平面の間（3 次元）

書き挙げたらきりがない．われわれがやりたいことは，Dirichlet 問題の代表的な例題を解いて示すことによって，読者が一般原理を知り自分自身の新しい問題を解くことができるようにすることである．

この課の目標は，二つのゆがんだ輪の間の石けん膜の形を求めることである．内部 Dirichlet 問題のときほどには直観は役に立たないであろう．この問題のモデルは

(34.1)

$$\text{偏微分方程式}\quad u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\quad (R_1<r<R_2)$$

$$\text{境界条件}\quad \begin{cases} u(R_1,\theta)=g_1(\theta) \\ u(R_2,\theta)=g_2(\theta) \end{cases}\quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

である．この問題の概観を図 34.1 に示す．

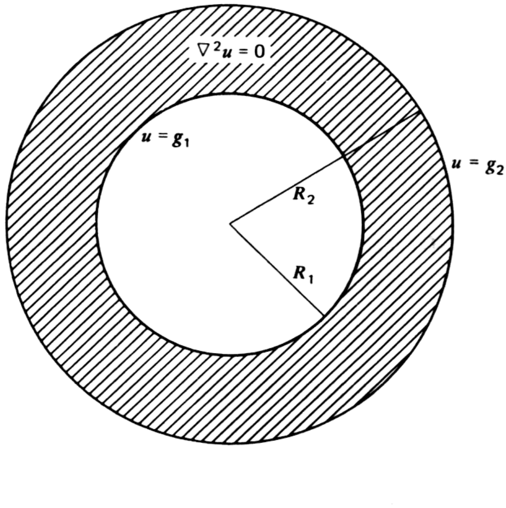


図 34.1　円環領域における Laplace 方程式

ここでの問題は，2円 $r=R_1$ と $r=R_2$ の間の解 $u(r,\theta)$ を求めることである．ただし，$u(r,\theta)$ はこれら二つの円周上で $g_1(\theta)$ および $g_2(\theta)$ と与えられている．まず

$$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$$

の形の解を探すことから始める．これを Laplace 方程式に代入すると $R(r)$ と $\Theta(\theta)$ に関する次のような二つの常微分方程式が得られる：

$$r^2R''+rR'-\lambda^2R=0 \quad \text{(Euler 方程式)}$$
$$\Theta''+\lambda^2\Theta=0$$

二つの方程式において，分離定数（λ^2 とした）は非負である必要があったことに注意せよ．そうでないと $\Theta(\theta)$ の解が周期的でなくなってしまう．次のステップはこれら二つの常微分方程式を解き，それらの解を掛け合わせることである．こうすると偏微分方程式に対する $R(r)\Theta(\theta)$ という形の解が得られるであろう．

二つの方程式の中で，Euler 方程式の方に興味がある．幸いにも，それはかなり簡単に解くことのできる変数係数の常微分方程式の一つである．解を求めるには二つの場合を考えるのがよい．

Euler 方程式（$r^2R''+rR'-\lambda^2R=0$）の解

場合 1（$\lambda=0$）この場合の Euler 方程式は

$$r^2R''+rR'=0$$

となり，一般解が

$$R(r)=a+b\ln r$$

であることが簡単にわかる．これは，$V(r)=R'(r)$ とおき，新しい方程式

$$rV'(r)+V(r)=0$$

を $V(r)$ について解けば求まる．（常微分方程式の変数分離の技法を使って）$V(r)=c_1/r$ を求めた後，これを $R'(r)=V(r)$ に代入して

$$R(r)=c_1\ln r+c_2$$

が得られる．

場合 2（$\lambda>0$）この場合の Euler 方程式は

$$r^2R''+rR'-\lambda^2R=0$$

であるが，これを解くには，$R(r)=r^\alpha$ の形の解を探す．目標は，一般解が

$$R(r)=ar^{\alpha_1}+br^{\alpha_2}$$

であるような α の二つの値（それを α_1, α_2 とする）を求めることである．$R(r)=r^\alpha$ を Euler 方程式に代入すると $\alpha=\lambda, -\lambda$ が得られる．したがって

$$R(r)=ar^\lambda+br^{-\lambda}$$

である．

この Euler 方程式の解を使うと

$$\lambda=0 \begin{cases} R(r)=a+b\ln r \\ \Theta(\theta)=c+d\theta \end{cases}$$

$$\lambda>0 \begin{cases} R(r)=ar^\lambda+br^{-\lambda} \\ \Theta(\theta)=c\cos(\lambda\theta)+d\sin(\lambda\theta) \end{cases}$$

が得られる．また，$\Theta(\theta)$ が周期 2π の周期関数でなければならないという要請から，λ は $1, 2, 3, \cdots$ でなければならない．したがって，Laplace 方程式の次のような解に到達する．

Laplace 方程式に対する積形式の解

c　（定数）

$c\ln r$

$cr^n\cos(n\theta)$

$cr^n\sin(n\theta)$

$cr^{-n}\cos(n\theta)$

$cr^{-n}\sin(n\theta)$

これらの解の和もすべてまた解であるから，Laplace 方程式の一般解

(34.2)★
$$u(r,\theta)=a_0+b_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_nr^n+b_nr^{-n})\cos(n\theta) + (c_nr^n+d_nr^{-n})\sin(n\theta)]$$

が得られる．

残されている仕事は，和 (34.2) の中の定数を，$u(r,\theta)$ が境界条件

$$u(R_1,\theta)=g_1(\theta)$$
$$u(R_2,\theta)=g_2(\theta)$$

を満たすように，定めることである．上の解 (34.2) をこれらの境界条件に代入すると次の式が得られる：

$$\begin{cases} a_0+b_0 \ln R_1=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_1(s)ds \\ a_0+b_0 \ln R_2=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_2(s)ds \end{cases}$$
（この２式から a_0, b_0 を解いて求める）

(34.3)
$$\begin{cases} a_nR_1{}^n+b_nR_1{}^{-n}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_1(s)\cos(ns)ds \\ a_nR_2{}^n+b_nR_2{}^{-n}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_2(s)\cos(ns)ds \end{cases}$$
（この２式から a_n, b_n を解いて求める）

$$\begin{cases} c_nR_1{}^n+d_nR_1{}^{-n}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_1(s)\sin(ns)ds \\ c_nR_2{}^n+d_nR_2{}^{-n}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_2(s)\sin(ns)ds \end{cases}$$
（この２式から c_n, d_n を解いて求める）

これらの式を解いて定数 $a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n$ を定めることができる．これで問題 (34.1) が解けた．解は (34.2) で，その定数は式 (34.3) により定まる．

この解がどんな感じのものであるかを例示するために，簡単な問題を二三解いてみよう．

円環領域における Dirichlet 問題の解法例

例 1

内側の円周上ではポテンシャルが零，外側の円周上ではポテンシャルが $\sin\theta$ である場合を考えよう．

偏微分方程式　$\nabla^2 u=0 \quad (1<r<2)$

境界条件
$$\begin{cases} u(1,\theta)=0 \\ u(2,\theta)=\sin\theta \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

解の計算の第１ステップは式 (34.3) の積分を計算することである．簡単な計算の後得られる連立方程式を解いて $a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n$ を定めると

$$a_0=0$$
$$b_0=0$$
$$\left.\begin{array}{l} a_n=0 \\ b_n=0 \end{array}\right. \quad (n=1,2,\cdots)$$
$$c_n=\begin{cases} 2/3 & (n=1) \\ 0 & (n=2,3,\cdots) \end{cases}$$
$$d_n=\begin{cases} -2/3 & (n=1) \\ 0 & (n=2,3,\cdots) \end{cases}$$

が得られる．これらの値から

$$u(r,\theta)=\frac{2}{3}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

という解が得られる．$u(r,\theta)$ が境界条件を両方とも満たすことは簡単に確かめることができる．これは一般解 (34.2) の形をしているから，明らかに Laplace 方程式を満たす．

例 2

境界上でポテンシャルが一定である問題を考えよう：

偏微分方程式　$\nabla^2 u=0 \quad (1<r<2)$

境界条件　$\begin{cases} u(1,\theta)=3 \\ u(2,\theta)=5 \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$

この場合，（境界条件が θ に関係しないので）解が θ に関係しないことは明らかで，計算の手間が省ける．つまり，解は $a_0+b_0\ln r$ の形をしていなければならない．a_0 と b_0 を求めるための二つの式は

$$a_0+b_0\ln 1=3$$
$$a_0+b_0\ln 2=5$$

となる．したがって，

$$a_0=3, \qquad b_0=\frac{2}{\ln 2}=2.9$$

である．そこで，解は

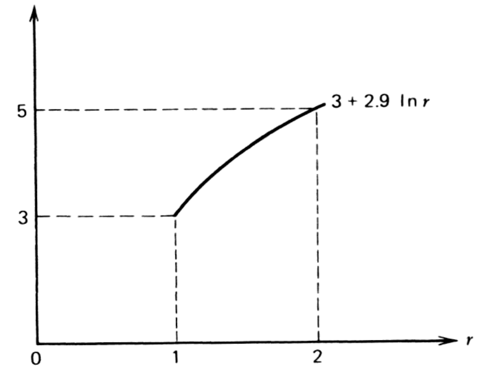


図 34.2　円環領域の内部 $(1<r<2)$ のポテンシャルの半径方向の変化

$$u(r,\theta)=3+2.9\ln r$$

となる．この解のグラフを図 34.2 に示す．

例 3

もう一つの興味ある問題は

偏微分方程式 $\nabla^2 u=0 \quad (1<r<2)$

境界条件 $\begin{cases} u(1,\theta)=\sin\theta \\ u(2,\theta)=\sin\theta \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$

である．係数 $a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n$ をざっと調べてみると，c_1 と d_1 を除いてすべて零であることがわかる．また，c_1 と d_1 を定めるための式は

$$c_1+d_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 s ds=1$$

$$2c_1+\frac{d_1}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 s ds=1$$

となる．これを解いて c_1 と d_1 を定めると $c_1=1/3,\ d_1=2/3$ を得る．したがって，解は

$$u(r,\theta)=\left(\frac{1}{3}r+\frac{2}{3r}\right)\sin\theta$$

である．θ のいろいろな値に対するこの曲線の形を図 34.3 に示す．

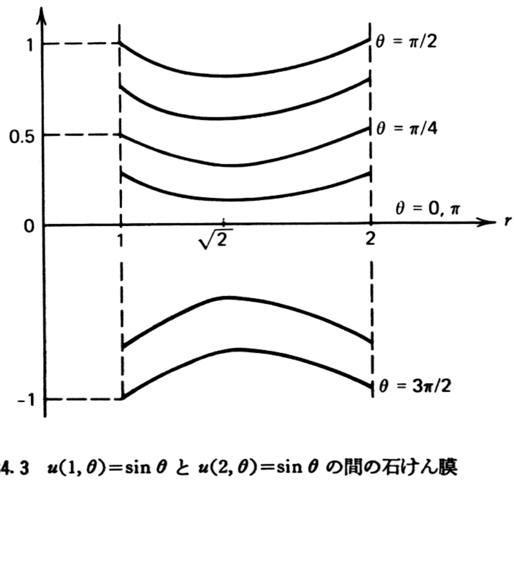


図 34.3 $u(1,\theta)=\sin\theta$ と $u(2,\theta)=\sin\theta$ の間の石けん膜

この課を終わるに当たって，円に対する外部 Dirichlet 問題にもちょっと触れておこう．

外部 Dirichlet 問題

外部 Dirichlet 問題

$$\text{偏微分方程式}\quad u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \quad (1<r<\infty)$$

$$\text{境界条件}\quad u(1,\theta)=g(\theta) \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

は，r が無限大になるとき有界でないような解

$$r^n \cos(n\theta),\quad r^n \sin(n\theta),\quad \ln r$$

をここでは捨ててしまうという点を除けば，第 33 課で学んだ内部 Dirichlet 問題とまったく同じように解ける．したがって，解は

(34.4)★
$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^{-n}[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

である．ここで a_n と b_n は前とまったく同じで

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos(n\theta)d\theta,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin(n\theta)d\theta$$

である．いいかえれば，$u(1,\theta)=g(\theta)$ を Fourier 級数

$$g(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

に展開して，各項に r^{-n} を掛けたものが解であるといえる．

この解になじんでもらえるよう，二つの例を挙げよう．

外部 Dirichlet 問題の例

例 1

外部問題

$$\text{偏微分方程式}\quad \nabla^2 u=0 \quad (1<r<\infty)$$

$$\text{境界条件}\quad u(1,\theta)=1+\sin\theta+\cos(3\theta) \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

は，解

$$u(r,\theta)=1+\frac{1}{r}\sin\theta+\frac{1}{r^3}\sin(3\theta)$$

をもつ.

例 2

外部問題

$$\text{偏微分方程式} \quad \nabla^2 u=0 \quad (1<r<\infty)$$
$$\text{境界条件} \quad u(1,\theta)=\cos(4\theta) \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

は，解

$$u(r,\theta)=\frac{1}{r^4}\cos(4\theta)$$

をもつ．この解がどんな形をしているか想像してみるとよい．

注意

1. 任意の半径 R に対する外部 Dirichlet 問題

$$\text{偏微分方程式} \quad \nabla^2 u=0 \quad (R<r<\infty)$$
$$\text{境界条件} \quad u(R,\theta)=g(\theta) \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

は，解

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{-n}[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

をもつ.

2. 2次元 Laplace 方程式の解で θ に依存しないものは定数と $\ln r$ だけである．ポテンシャル $\ln r$ は非常に重要で，**対数ポテンシャル**と呼ばれる．対数ポテンシャルについては，後でもっと詳しく検討することにしよう．

練習問題

1. Dirichlet 問題

$$\text{偏微分方程式} \quad \nabla^2 u=0 \quad (1<r<2)$$
$$\text{境界条件} \quad \begin{cases} u(1,\theta)=\cos\theta \\ u(2,\theta)=\sin\theta \end{cases}$$

を解け.

2. 外部 Dirichlet 問題

$$\text{偏微分方程式} \quad \nabla^2 u=0 \quad (1<r<\infty)$$

の解は，次のような境界条件に対して，それぞれ，どのようになるか．

(a) $u(1,\theta)=1$

（b）　$u(1,\theta)=1+\cos(3\theta)$

（c）　$u(1,\theta)=\sin\theta+\cos(3\theta)$

（d）　$u(1,\theta)=\begin{cases}1 & (0\leqq\theta<\pi)\\ 0 & (\pi\leqq\theta<2\pi)\end{cases}$

3. 外部 Neumann 問題

偏微分方程式　$\nabla^2 u=0\quad(1<r<\infty)$

境界条件　$\dfrac{\partial u}{\partial r}(1,\theta)=g(\theta)\quad(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

は Dirichlet 問題と同じ形の解

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^{-n}[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

をもつが，係数 a_n と b_n は，今度は，新しい境界条件を満足しなければならない．

$$\nabla^2 u=0\quad(1<r<\infty)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta)=\sin\theta$$

の解を求めるには，上の形の解を境界条件

$$\frac{\partial n}{\partial r}(1,\theta)=\sin\theta$$

に代入すればよい．そうやって求めた解が正しいことを確認せよ．もちろん，ある解が得られたら，その解に任意の定数を足したものもまた解である．

4. 一般解 (34.2) を境界条件

$$u(R_1,\theta)=g_1(\theta)$$

$$u(R_2,\theta)=g_2(\theta)$$

に代入して式 (34.3) を導け．

参考書

Tyn Myint-U, *Partial Differential Equations*, Elsevier, 1973. Dirichlet 問題についての優れた解説書である．例題がたくさん計算してある．

第35課　球座標に関する Laplace 方程式(球面調和関数)

目的：　球座標に関する Laplace 方程式の特殊解を求めること．それらが求められると，いろいろな問題（Dirichlet, Neumann など）を解く際にいろいろなやり方で，それらの解を利用することができる．また，内部 Dirichlet 問題

$$\text{偏微分方程式}\quad (r^2u_r)_r+\frac{1}{\sin\phi}[(\sin\phi)u_\phi]_\phi+\frac{1}{\sin^2\phi}u_{\theta\theta}=0$$

$$\text{境界条件}\quad u(1,\theta,\phi)=g(\theta,\phi)\quad (0\leqslant\phi\leqslant\pi)$$

を，境界ポテンシャル $g(\theta,\phi)$ が ϕ（北極からの角）だけに関係するような特殊な場合について解く．そこでは，境界ポテンシャル $g(\phi)$ を球面調和関数の無限級数

$$g(\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(\cos\phi)$$

に展開する．ここで，球面調和関数 $P_n(\cos\phi)$ はすべて Laplace 方程式の特殊解で，$\cos\phi$ の n 次多項式（Legendre（ルジャンドル）多項式と呼ばれる）である．この展開が求まったら，解は

$$u(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^nP_n(\cos\phi)$$

と表現できる．同様に，外部 Dirichlet 問題は解

$$u(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\phi)$$

をもつ．

境界上でポテンシャルが与えられているとき，球内部あるいは球外部のポテンシャルを求めることは物理学において重要な一つの問題である．内部問題に

対しては

$$(35.1)\quad \begin{cases} \text{偏微分方程式} & (r^2u_r)_r+\dfrac{1}{\sin\phi}[(\sin\phi)u_\phi]_\phi+\dfrac{1}{\sin^2\phi}u_{\theta\theta}=0 \\ \text{境界条件} & u(1,\theta,\phi)=g(\theta,\phi) \quad (-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\phi\leqslant\pi) \end{cases}$$

を満足する関数 $u(r,\theta,\phi)$ を求めなければならない．この球座標ラプラシアンの式は前の課で示したものとは少し違う形であることに注意せよ．この形の方が少し簡潔で使いやすい．

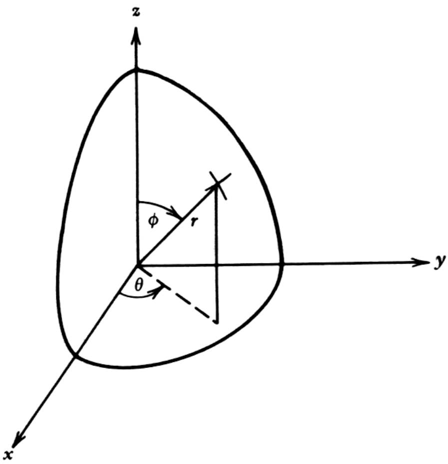


図 35.1　球内部の Dirichlet 問題

このモデルの代表的な応用例は，境界上で温度が与えられているとき球内部の温度分布を求めることであろう．$g(\theta,\phi)$ は特殊な形をしていることが大変多いから，最も一般的な形の $g(\theta,\phi)$ に対して問題を解いておくことは必要でない．

重要な二つの特殊な場合をこの課では考える．一つは $g(\theta,\phi)$ が定数の場合，もう一つは $g(\theta,\phi)$ が角 ϕ（北極からの角）だけに関係する場合である．

Dirichlet 問題の特殊な場合

特殊な場合 1　($g(\theta,\phi)=$定数)

この場合，解が θ と ϕ に関係しないことは明らかである．したがって，

Laplace 方程式は常微分方程式

$$(r^2 u_r)_r = 0$$

に帰着される．これは誰でも簡単に解ける常微分方程式である．一般解は

$$u(r) = \frac{a}{r} + b \tag{35.2}$$

である．いいかえれば，原点からの半径方向の距離だけに関係するポテンシャルとしては定数と c/r しかない．ポテンシャル $1/r$ は物理学において非常に重要であり，**Newton ポテンシャル**と呼ばれる．さて，ポテンシャルが r だけに関係する二つの問題を解こう．

問題 1　**(球内部のポテンシャル)**

偏微分方程式　$\nabla^2 u = 0 \quad (0 < r < 1)$

境界条件　$u(1, \theta, \phi) = 3$

解 (35.2) が有界であるためには $u(r, \theta, \phi) = 3$ でなければならない．

問題 2　**(それぞれが定数ポテンシャルをもつ二つの球面の間のポテンシャル)**

二つの同心球面が異なる温度に保たれているときそれら二つの球面にはさまれた部分の定常状態の温度を求めたい．

偏微分方程式　$\nabla^2 u = 0 \quad (R_1 < r < R_2)$

境界条件　$\begin{cases} u(R_1, \theta, \phi) = A \\ u(R_2, \theta, \phi) = B \end{cases}$

ポテンシャルが，一般解

$$u(r) = \frac{a}{r} + b$$

をもつことを知っているから，これを境界条件に代入して a と b について解く．すると，

$$a = (A - B)\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \qquad b = \frac{R_2 B - R_1 A}{R_2 - R_1}$$

が得られる．したがって，

$$u(r) = \frac{(A - B) R_1 R_2}{(R_2 - R_1) r} + \frac{R_2 B - R_1 A}{R_2 - R_1}$$

である．図 35.2 には，境界ポテンシャル A, B のいろいろな値に対してこの

ポテンシャルのグラフが描いてある．

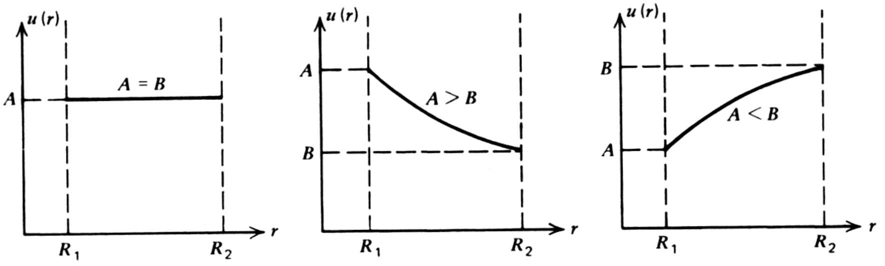


図 35.2　ポテンシャルが定数 A と B であるような二つの同心球の間のポテンシャル

特殊な場合 2 （$g(\theta,\phi)$ が ϕ だけに関係する場合）

ここでは Dirichlet 問題は

$$\text{偏微分方程式}\quad (r^2u_r)_r+\frac{1}{\sin\phi}[(\sin\phi)u_\phi]_\phi=0\quad(0<r<1)$$

$$\text{境界条件}\qquad u(1,\theta,\phi)=g(\phi)\quad(0\leqslant\phi\leqslant\pi)$$

という形をとる．変数分離により

$$u(r,\phi)=R(r)\Phi(\phi)$$

という形の解を探す．すると，二つの常微分方程式

$$r^2R''+2rR'-n(n+1)R=0\quad(\text{Euler 方程式})$$

$$[(\sin\phi)\Phi']'+n(n+1)(\sin\phi)\Phi=0\quad(\text{Legendre 方程式})$$

に到達する．分離定数は便宜上 $n(n+1)$ と選んである．なぜこのように選んだかはすぐ説明する．

$R(r)=r^\alpha$ を代入し α を定めるというやり方で Euler 方程式を解こう．すると，二つの値

$$\alpha=\begin{cases}n\\-(n+1)\end{cases}$$

が得られる．したがって，Euler 方程式は一般解

$$R(r)=ar^n+br^{-(n+1)}$$

をもつ．

Legendre 方程式を解くのはそれほど簡単でない．この方程式を解くときの

秘訣は

$$x=\cos\phi$$

という代入を行うことである．この変数変換により新しい Legendre 方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2\Phi}{dx^2}-2x\frac{d\Phi}{dx}+n(n+1)\Phi=0 \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

が得られる．$\Phi(x)$ について解き，解に $x=\cos\phi$ を代入するというのが方針である．Legendre 方程式は変数係数の2階の線形常微分方程式である．この方程式が難しい原因の一つは $d^2\Phi/dx^2$ の係数 $(1-x^2)$ が変域 $-1\leqslant x\leqslant 1$ の端で零になることである．このような方程式は**特異微分方程式**と呼ばれ，Frobenius（フロベニウス）の方法で解かれることが多い．この方法の詳細には立ち入らないが（“参考書”を見よ），非常に興味ある結論が得られる．それは，Legendre 方程式は $n=0,1,2,\cdots$ のときだけ有界な解を有し，その解は多項式 $P_n(x)$（Legendre 多項式）であるということである：

$$
\begin{array}{ll}
n=0 & P_0(x)=1 \\
n=1 & P_1(x)=x \\
n=2 & P_2(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-1) \\
n=3 & P_3(x)=\dfrac{1}{2}(5x^3-3x) \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1) \\
\vdots & \qquad\vdots \\
n & P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n
\end{array}
$$

（Rodrigues（ロドリーグ）の公式）

Legendre 多項式のグラフを図 35.3 に示す．

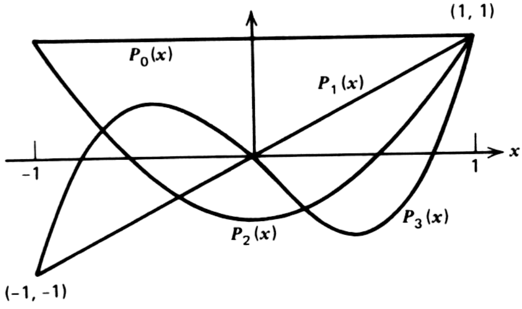


図 35.3 Legendre 多項式 $P_n(x)$

これで，

$$r^2R''+2rR'-n(n+1)R=0 \quad (0<r<1)$$
$$[(\sin\phi)\Phi']'+n(n+1)(\sin\phi)\Phi=0 \quad (0\leqslant\phi\leqslant\pi)$$

の有界な解は

$$R(r)=ar^n$$
$$\Phi(\phi)=aP_n(\cos\phi)$$

であることがわかった．

関数 $P_n(\cos\phi)$ は n 次の Legendre 多項式の x を $\cos\phi$ で置き変えたものにほかならない．最後のステップは，境界条件 $u(1,\phi)=g(\phi)$ に合うように，和

(35.3) $$u(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^nP_n(\cos\phi)$$

を作ることである．解 (35.3) を境界条件に代入すると

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(\cos\phi)=g(\phi)$$

が得られる．この式の両辺に $P_m(\cos\phi)\sin\phi$ を掛けて 0 から π まで ϕ について積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}g(\phi)P_m(\cos\phi)\sin\phi d\phi&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\pi}P_n(\cos\phi)P_m(\cos\phi)\sin\phi d\phi\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx\\&=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \dfrac{2a_m}{2m+1} & n=m\end{cases}\end{aligned}$$

が得られる．Legendre 多項式は区間 $[-1,1]$ において直交しているということを証明することができる．したがって，

(35.4)★ $$a_m=\frac{2m+1}{2}\int_0^{\pi}g(\phi)P_m(\cos\phi)\sin\phi d\phi$$

であり，Dirichlet 問題 (35.1) の解は

(35.5)★ $$u(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^nP_n(\cos\phi)$$

となる．ここで，係数 a_n は式 (35.4) で与えられる．

次に，軸対称ポテンシャルの具体的な例を挙げよう．

軸対称ポテンシャル（θ に関係しない）

球の表面の温度が

$$g(\phi)=1-\cos(2\phi) \quad (0\leqslant\phi\leqslant\pi)$$

で与えられたときの球の内部の温度を求めたいとしよう．この問題では，同緯度の円の上で温度は一定である（たとえば，赤道上での温度は2）．u を定めるには

偏微分方程式 $\nabla^2 u=0 \quad (0<r<1)$

境界条件 $u(1,\theta,\phi)=1-\cos(2\phi) \quad (0\leqslant\phi\leqslant\pi)$

を解かなければならない．境界の温度を表すグラフを図 35.4 に示す．

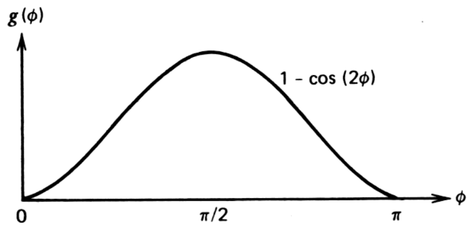


図 35.4 北極からϕラジアンの等緯度円上の温度

今の目標は解 (35.5) の中の係数 a_n を求めることである．これを求めるには

（a） 公式 (35.4) を使う

（b） Legendre 展開の係数を求める既存の計算機プログラムを使う（各自の計算センターに問い合わせよ）

（c） 少々の常識を使う

のいずれかである．最後の方法によるとして，三角法の公式

$$\cos(2\phi)=2\cos^2\phi-1$$

を考えてみよう．この公式を使うと境界温度 $g(\phi)$ を次のように書くことができる：

$$\begin{aligned}1-\cos(2\phi)&=1-[2\cos^2\phi-1]\\&=1-\frac{2}{3}[3\cos^2\phi-1]+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$=\frac{4}{3}P_0(\cos\phi)-\frac{4}{3}P_2(\cos\phi)$$

これは $g(\phi)$ の Legendre 多項式による級数展開である．したがって，この問題の解は

$$u(r,\phi)=\frac{4}{3}P_0(\cos\phi)-\frac{4r^2}{3}P_2(\cos\phi)$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{2r^2}{3}(3\cos^2\phi-1)$$

である．いろいろな緯度におけるこの解のグラフを図 35.5 に示す．

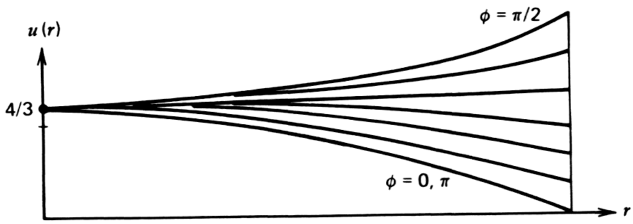


図 35.5　球の中心から境界までの温度

注意

1. 境界ポテンシャル $g(\phi)$ を級数

$$g(\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(\cos\phi)$$

に展開した後，第 n 項に r^n を掛けるだけで解

$$u(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^nP_n(\cos\phi)$$

が得られることがわかる．

2. 外部 Dirichlet 問題

偏微分方程式　$\nabla^2u=0\quad(1<r<\infty)$

境界条件　$u(1,\theta,\phi)=g(\phi)$

の解は

$$u(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\phi)$$

である．ここで，

$$b_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^\pi g(\phi)P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi$$

である．たとえば，境界条件 $g(\phi)=3$ からは解 $u(r,\phi)=3/r$ が得られる．境界条件が定数であるような2次元の外部 Dirichlet 問題の解は定数であったが，3次元の問題では $r\to\infty$ で解が零に向かうということに注意せよ．

練習問題

1. $R(r)=r^\alpha$ を Euler 方程式

$$r^2R''+2rR'-n(n+1)R=0$$

に代入して $\alpha=n$, $-(n+1)$ であることを示せ．

2. 変数変換 $x=\cos\phi$ により，ϕ に関する Legendre 方程式

$$[(\sin\phi)\Phi']'+n(n+1)(\sin\phi)\Phi=0 \quad (0\leqslant\phi\leqslant\pi)$$

を x に関する新しい Legendre 方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2\Phi}{dx^2}-2x\frac{d\Phi}{dx}+n(n+1)\Phi=0 \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

に変換せよ．

3. Legendre 多項式 P_0, P_1, P_2, P_3 に対して Rodrigues の公式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

が成り立つことを証明せよ．

4. 内部 Dirichlet 問題

偏微分方程式 $\nabla^2 u=0 \quad (0<r<1)$

境界条件 $u(1,\phi)=\cos(3\phi)$

を解け．三角関数の公式集を使って $\cos(3\phi)$ を $\cos\phi$, $\cos^2\phi$, $\cos^3\phi, \cdots$ で表し，それらを適当に組み合わせて展開式

$$\cos(3\phi)=a_0P_0(\cos\phi)+a_1P_1(\cos\phi)+\cdots$$

を求めよ．

5. $$\nabla^2 u=0 \quad (0<r<1)$$

$$u(1,\phi)=\begin{cases} 1 & \left(0\leqslant\phi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{\pi}{2}<\phi\leqslant\pi\right)\end{cases}$$

を解け．これは，北半球の境界が暑く（+1），南半球の境界が寒い（−1）という問題である．

6. 外部 Dirichlet 問題

偏微分方程式　$\nabla^2 u=0 \quad (1<r<\infty)$

境界条件　$u(1,\phi)=1+\cos\phi$

の解を求めよ．そしてその解が正しいかどうか検証せよ．

参考書

W. Boyce, R. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary-Value Problems*, Wiley & Sons, 1969. 常微分方程式の最良の教科書の一つである．この本には Euler, Bessel, Legendre などの方程式の話が載っている．

第36課　非同次の Dirichlet 問題 (Green 関数)

目的：　非同次 Dirichlet 問題の Green 関数（インパルス応答関数）を用いた解法を示すこと．この重要な技法は，方程式の右辺（一般に，入力のようなものと考えてよい）を変域の各点でのインパルス（デルタ関数あるいは点衝撃）をつなげたものに分解する．それぞれのインパルスに対する応答を求め（Green 関数あるいはインパルス応答関数），それらを加える（積分する）と全体の応答が得られる．

応用数学によく現れる問題の一つとして，ある空間領域の内部に加えられる強制項 $f(x,y)$ に対する応答としてその領域内のポテンシャルを求める問題がある．静電気では，領域 D 内の電荷密度 $f(x,y)$ に対する D 内のポテンシャル（ボルト）をその領域全部にわたって定める問題などがそれである．その代表的な例は

(36.1)
$$\text{偏微分方程式}\quad u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=f(r,\theta)$$
$$\text{境界条件}\quad u(1,\theta)=0\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

（境界条件が零の Poisson の方程式）を満たす2次元の円の内部のポテンシャルを求める問題である．ここで，境界値を零に選んだことに注意せよ．方程式も境界条件も非同次である一般の場合を解きたければ，第33課で得た Poisson の積分公式による同次 Dirichlet 問題の解をこの課で得られる解に加えればよい．

非同次微分方程式についての直観的な感じをつかむために，次のような Poisson 方程式の解のグラフを描くことを考えてみよう：

$$\text{偏微分方程式}\quad \nabla^2u=-q\quad(0<r<1\,;\ q\ \text{は正の定数})$$

境界条件　$u(1,\theta)=0 \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$

ポテンシャル (温度の方が考えやすければ温度) は境界上で零に保たれており，u のラプラシアンは円の内部で常に $-q$ に等しい．$\nabla^2 u(p)$ は点 p における値 $u(p)$ と p の近傍の u の値の平均との差を表すから，Poisson 方程式は，面 $u(r,\theta)$ が常に下に凹であることを表している．いいかえれば，境界に固定されながら下から空気の流れでたえず押し上げられている薄い太鼓の膜のように見えるであろう．もし右辺が変域内で変化する関数 $f(x,y)$ であるとしたら，各点の凹度も変化するであろう．

さて，この課の主要部分，すなわち Green 関数を導入し方程式 (36.1) を解くことに入ろう．

まず，点湧き出しと点吸い込みに対応するポテンシャルの概念を導入しなければならない．

点湧き出しと点吸い込みに対応するポテンシャル

非同次線形方程式を解く場合，一つの点湧き出しに対応する応答がわかれば，それらを足し合わせることにより一般の問題の解を求めることができるから，一つの点湧き出しをもつ方程式が解ければ十分である．この課の目標は，点湧き出し（あるいは，吸い込み）による空間のある領域内のポテンシャルを求めることである．湧き出しとか吸い込みとかはいろいろな解釈ができる．熱流では，熱が発生する点を湧き出しと考え，消滅する点を吸い込みと考えることができる．一方，静電気では，点湧き出しは正の点電荷（プロトン）であり，吸い込みは負の点電荷（電子）である．どんな解釈をするにしても，今ここではただ1個の点湧き出しによる2次元ポテンシャル $u(r)$ を求める（3次元のポテンシャルは練習問題に譲る）ことにする．

原点に大きさ $+q$ のただ1個の点湧き出しがあるとしよう．熱（あるいは何でも）はその点から放射状に半直線に沿って外側へ流れるであろうから，半径 r の円を貫く外向きの全流束の量を計ると，図 36.1 に書いてあるような状況になる．

外向きの流束の総量は円内部で発生する総熱量に等しいはずである（エネルギー保存）から，

$$-2\pi r u_r(r)=q$$

である．この簡単な微分方程式を $u(r)$ について解くと

$$\text{円を貫く外向きの全流束} = -\int_0^{2\pi} u_r(r)r\,d\theta$$
$$= -2\pi r u_r(r)$$

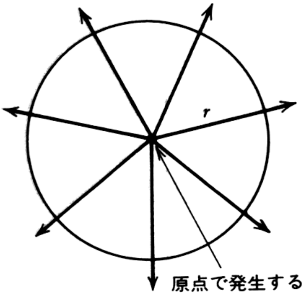


図 36.1 点湧き出しによる放射状の熱流

$$u(r)=\frac{-q}{2\pi}\ln r=\frac{q}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$$

が得られる．図 36.2 を見よ．

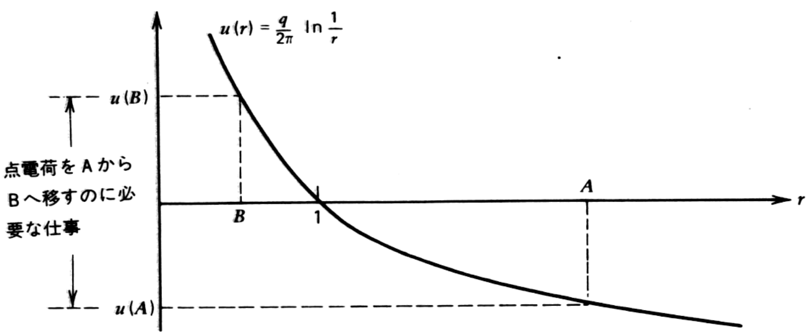


図 36.2 点湧き出しによる2次元ポテンシャル

静電気の言葉でいえば，ポテンシャルの差 $u(B)-u(A)$ は正の点電荷を A から B へ移すのに必要な仕事を表す（図 36.2）．一方，吸い込みは負の湧き出しを表し，したがって，大きさ $-q$ の吸い込みは

$$u(r)=\frac{-q}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$$

というポテンシャル場を作る．

これで点電荷によるポテンシャルの話は終わる．Green 関数によって非同次方程式を解く準備がこれでできた．

円内部の Poisson の方程式

重要な問題

(36.2)
偏微分方程式　$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=f(r,\theta)\quad(0<r<1)$

境界条件　$u(1,\theta)=0\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$

を解こう．Green 関数による方法（インパルス応答法）は二つのステップから成っている：

1. (ρ,ϕ) に点電荷（大きさ 1）があるとき，境界上で零という値を取るように制約された (r,θ) におけるポテンシャル $G(r,\theta,\rho,\phi)$ を求める．
2. 個々の応答 $G(r,\theta,\rho,\phi)$ に右辺（電荷密度）$f(r,\theta)$ の重みを掛け，円内部のすべての点 (ρ,ϕ) にわたって足し合わすことによって，解

$$u(r,\theta)=\int_0^{2\pi}\int_0^1 G(r,\theta,\rho,\phi)f(\rho,\phi)\rho d\rho d\phi$$

を得る．

上のような条件を満たすインパルス応答 $G(r,\theta,\rho,\phi)$ を求めよう．

応答ポテンシャル $G(r,\theta,\rho,\phi)$ を求める

まず，右辺 $f(r,\theta)$ の代りに任意の点 (ρ,ϕ) に大きさ $+1$ の点湧き出しを置く．数学的には，点湧き出しをインパルス関数（あるいは δ 関数）と呼び，$\delta(r-\rho,\theta-\phi)$ で表す．この δ 関数は，(ρ,ϕ) に単位電荷があり，(ρ,ϕ) を除くすべての点で零になるような r と θ の関数である．“力”という言葉を使えば，δ 関数は 1 点 (ρ,ϕ) に作用する大きさ $+1$ の力と解釈できよう．ここでやろうとしていることは，点電荷による応答ポテンシャル（境界上で零に束縛されている）を求めることである．この関数は**インパルス応答関数**（すなわち **Green 関数**）と呼ばれ，(ρ,ϕ) にある点湧き出しに対応する (r,θ) での応答である．境界上でこの関数は零にならなければならないということのためにこの関数を求めることは難しい．零である必要さえなければ，問題は易しい．な

ぜなら，(ρ, ϕ) にある点電荷によるポテンシャルは

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$$

であることをわれわれはすでに知っているからである（ここで r は電荷からの距離，つまり (ρ, ϕ) からの距離である）.

物理的には，$G(r, \theta, \rho, \phi)$ を求めることは次のようなことに対応している：

1. (ρ, ϕ) に熱源を置き，境界温度を零に固定した場合の，円内部の平衡温度を求めること.
2. 境界上では零に固定され，(ρ, ϕ) で高い所にまで引き上げられているぴんと張った太鼓の膜の高さを求めること.
3. (ρ, ϕ) に正の点電荷を置き，境界をアースしてそのポテンシャルを零にしたときの，円内部の静電ポテンシャルを求めること.

では，Green 関数を求めよう．Green 関数は図 36.3 のような形をしているであろう.

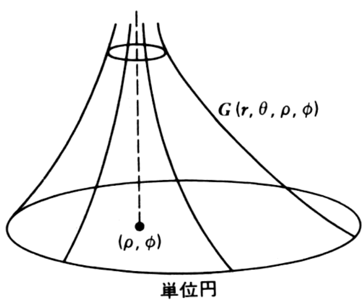


図 36.3　(ρ, ϕ) に置いた湧き出しによる Green 関数 $G(r, \theta, \rho, \phi)$

解を求めるステップ

ステップ 1　関数

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R}$$

は $Q=(\rho, \phi)$ に単位電荷があるときの $P=(r, \theta)$ におけるポテンシャルである（R は P から Q までの距離）．そこで，境界上で零になるようにこの関数を

修正しさえすればよい．

ステップ 2　ある与えられた距離だけ離れたところに置かれた正電荷と負電荷の対によるポテンシャルの場は等ポテンシャル円を作るということを物理学者は経験から知っている (図 36.4)．

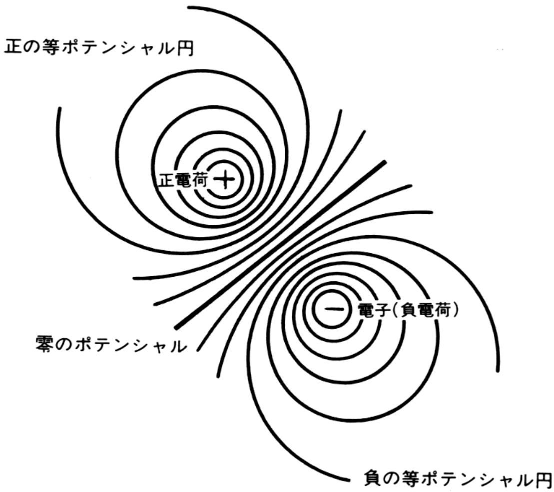


図 36.4　異なる電荷をもった粒子対によるポテンシャルの場

そこで，境界円周上で零になるような Green 関数を求める方策として，反対の電荷（負電荷）を円の外側の適当なところに置いて両方の電荷によるポテンシャルが円 $r=1$ 上で一定になるようにすることが考えられる．そうすれば，この "一定値" を引くことによって境界上で零となるポテンシャルが得られるであろう．明らかに，このポテンシャルは所望の $G(r,\theta,\rho,\phi)$ の性質を満足する．もちろん，境界上でポテンシャルが一定であるようにするために円の外のどこに負電荷を置くべきかというのは大問題である．結果だけを簡単に述べれば，負電荷を $\bar{Q}=(\bar{\rho},\bar{\phi})=(1/\rho,\phi)$ に置けば，二つの電荷によるポテンシャル

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\bar{R}}$$

が円 $r=1$ 上で一定になるということを示すことができる．変数 R, $\bar{R}$ は，それぞれ，電荷から (r,θ) までの距離である．実際，円 $r=1$ 上で一定のポテン

シャルの値が

$$\frac{-1}{2\pi}\ln\rho \quad (\text{正の定数})$$

であるということは簡単に示すことができる．図 36.5 を見よ．

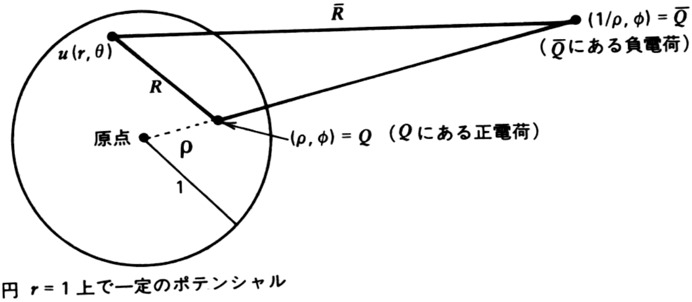


図 36.5 Q と $\bar{Q}$ にある電荷が $r=1$ 上で一定のポテンシャルを作る

これらのステップを総合すると，

$$G(r,\theta,\rho,\phi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\bar{R}}+\frac{1}{2\pi}\ln\rho \tag{36.3}$$

Qにある正電荷によるポテンシャル　$\bar{Q}$にある負電荷によるポテンシャル　境界上で一定のポテンシャルを引く

という Green 関数が構成される．ここで

$$R=\sqrt{r^2-2r\rho\cos(\theta-\phi)+\rho^2}$$

$$\bar{R}=\sqrt{r^2-2\frac{r}{\rho}\cos(\theta-\phi)+\frac{1}{\rho^2}}$$

(これら二つの式は2点間の距離を極座標で表す三角法の公式そのものである.) 元々の問題の答えを求めるには，インパルス関数の重ね合わせをしさえすればよい．そこで最後のステップに入ることができる．

ステップ 3 インパルス応答の重ね合わせ．このステップは易しい．単に

$$u(r,\theta)=\int_0^{2\pi}\int_0^1 G(r,\theta,\rho,\phi)f(\rho,\phi)\rho d\rho d\phi$$

すなわち

(36.4)★
$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \ln\left(\frac{\rho\bar{R}}{R}\right)f(\rho,\phi)\rho d\rho d\phi$$

という式を書きさえすればよい．これが円の内部の Poisson の方程式の Green 関数による解である．電荷密度 $f(r,\theta)$ が与えられたら，この積分を数値的に計算することができる．

注意

1. 偏微分方程式　$\nabla^2 u=0 \quad (0<r<1)$

   境界条件　$u(1,\theta)=g(\theta) \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$

   を Green 関数の方法により解くことも可能である．この場合の解は

$$u(r,\theta)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}G(r,\theta,1,\phi)g(\phi)d\phi$$

   となる．$\partial G/\partial r$ を計算すると（かなり退屈な計算であるが）

(36.5)
$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}\right]g(\phi)d\phi$$

   が得られる．これは第33課で求めた Poisson の積分公式と一致する．

2. 一般の Dirichlet 問題

   偏微分方程式　$\nabla^2 u=f(r,\theta) \quad (0<r<1)$

   境界条件　$u(1,\theta)=g(\theta) \quad (0<\theta\leqslant 2\pi)$

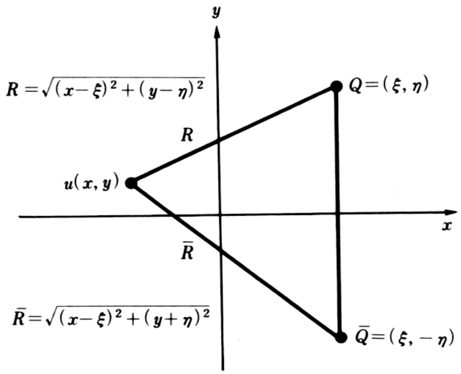
   の解は式 (36.4) と (36.5) の和として表すことができる．

3. Green 関数の方法によりいろいろな領域におけるたくさんの問題を解くことができる．しかし，領域の形が変わるごとに，また式の形が変わるごとに新しい Green 関数を求めなければならない．そして，Green 関数を求めることは必ずしも容易ではない．

4. 湧き出し $f(r,\theta)$ に対して解 (36.4) を実際に計算するには，たいていの場合、計算機による数値積分をしなければならない．

練習問題

1. 3次元における点湧き出しによるポテンシャルを求めよ．
2. 上半平面 $y>0$ における Laplace 方程式に対する Green 関数 $G(x,y,\xi,\eta)$ を求めよ．いいかえれば，(ξ,η) にある点電荷による上半平面の点 (x,y) におけるポテンシャル（境界 $y=0$ 上では零）を求めよ．次の図を見よ．



ヒント　負電荷を $\bar{Q}=(\xi,-\eta)$ に置くと，Q と $\bar{Q}$ にある二つの電荷による直線 $y=0$ 上のポテンシャルは零になることは明らかである．したがって，Green 関数はこれら二つの電荷によって引き起こされる場であろう．

3. 練習問題2の結果を使って，境界条件が零であるような上半平面における Poisson 方程式 $\nabla^2 u=-k$ の解を求めよ．
4. 第1象限 $x>0$, $y>0$ に対する Green 関数を作るにはどうすればよいか．
5. Poisson の方程式を解くためのもう一つの方法で，うまくいくこともあるものとして次のようなものがある：

　偏微分方程式　$\nabla^2 u=1 \quad (0<r<1)$

　境界条件　　　$u(1,\theta)=\sin\theta \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$

を解きたいとしよう．まず始めに

$$u_p(r,\theta)=Ar^2$$

を微分方程式に代入し，定数 A を定めて，$\nabla^2 u=1$ の特殊解を求める．

　特殊解 $u_p(r,\theta)$ が見つかったら，次に，$u=w+u_p$ と置いてみる．すると，$w(r,\theta)$ はどのような境界値問題を満足するか．その境界値問題を定めたら，それを解いて $w(r,\theta)$ を求めよ．最後に，元の問題の答え $u(r,\theta)$ を求めよ．その答えが正しいことを確かめよ．答えを注意深く眺めてみよ．各項の意味は何か．

参考書

1. E. C. Zachmanoglou,　D. W. Thoe,　*Introduction to Partial Differential Equations with Applications*, The Williams and Wilkins Company, 1976.

この本より程度が高いが，よく書かれており例題もいくつかある．まじめな学生の課外読本として使うことができる．

2. Tyn Myint-U, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Elsevier, 1973. Green 関数について上手に話が進めてある．

第5部

数値解法と近似解法

第 37 課　数値解(楕円型の問題)

目的：　偏微分方程式の中の偏導関数をその差分近似で置き変えることにより偏微分方程式を連立代数方程式に変えることができるということを示す．したがって，連立代数方程式を反復法により数値的に解くことにより偏微分方程式の近似解を得ることができる．

一般の楕円型問題を解くための現存の計算機パッケージ（ELLPACK）が利用可能であるということも指摘する．

これまでに，線形偏微分方程式を解くいくつかの方法について学んできた．しかし，本書で今まで取り扱ってきた方程式のほとんどはかなり簡単なもので，かなり単純な境界条件をもち，かなりすなおな形の変域をもっていた．しかし，このような型に適合するように簡単化することができる問題がそれほどたくさんあるわけではないので，多くの問題は数値的な近似解法で解かなければならない．過去十数年以上，科学者や技術者は，計算力を高め数値計算法を発展させることによって，取り扱いうる問題の種類を増やしてきた．高速計算機を利用した新しい技法がいくつも開発された．流体力学，弾性論，2 次元・3 次元のポテンシャル論などにおける非線形問題が，今日では，どんどん解かれているが，これは 10 年前には考えられないことであった．

数値計算法という名で呼ばれる手法にはいくつかのものがある．これらの手法について徹底的に知りたい読者は，この課の“参考書 1”を見るとよい．この課と次の二つの課では，ごくありふれた差分法を使って楕円型，双曲型，放物型の方程式を解く方法を示すことにしよう．

まず始めに，差分という概念を導入する．それから，この差分を使って正方形内部の Dirichlet 問題を解く方法を示そう．

差分近似

最初に，関数 $f(x)$ の Taylor（テイラー）級数展開

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots$$

のことを思い出そう．この級数を第2項までで打ち切ると，近似式

$$f(x+h)\cong f(x)+f'(x)h$$

が得られる．したがって，これを $f'(x)$ について解いた式

(37.1)
$$f'(x)\cong\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

は，1次導関数 $f'(x)$ の**前進差分近似**と呼ばれるものとなる．

また，Taylor 級数展開の h を $-h$ で置き換えてもよいが，そうすると**後退差分近似**

(37.2)
$$f'(x)\cong\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

が得られる．あるいは，

$$f(x+h)\cong f(x)+f'(x)h$$

から

$$f(x-h)\cong f(x)-f'(x)h$$

を引いて**中心差分近似**

(37.3)
$$f'(x)\cong\frac{1}{2h}[f(x+h)-f(x-h)]$$

を得ることもできる．

Taylor 級数の項をさらに1項余計に取ることにより，この解析のやり方を拡張して，2次導関数 $f''(x)$ の中心差分近似

(37.4)
$$f''(x)\cong\frac{1}{h^2}[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)]$$

が得られる．

さて，差分近似を偏導関数に拡張しよう．2変数の Taylor 級数展開

$$u(x+h,y)=u(x,y)+u_x(x,y)h+u_{xx}(x,y)\frac{h^2}{2!}+\cdots$$

$$u(x-h,y)=u(x,y)-u_x(x,y)h+u_{xx}(x,y)\frac{h^2}{2!}-\cdots$$

などから出発して，次の式を得ることができる：

$$u_x(x,y)\cong\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}\quad（前進差分）$$

$$u_{xx}(x,y)\cong\frac{1}{h^2}[u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)]$$

$$u_y(x,y)\cong\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k}$$

$$u_{yy}(x,y)\cong\frac{1}{k^2}[u(x,y+k)-2u(x,y)+u(x,y-k)]$$

どの近似（前進差分，中心差分，あるいは後退差分）を使ったらよいかは問題による．しかし，この課では中心差分近似を使おう．

これらの近似の使い方を例で説明するために，簡単な Dirichlet 問題を考えよう．

Dirichlet 問題の差分法による解

$$(37.5)\qquad \begin{array}{ll} 偏微分方程式 & u_{xx}+u_{yy}=0 \quad (0<x<1,\ 0<y<1) \\ 境界条件 & \begin{cases} u=0 & （正方形の上の辺と両横で） \\ u(x,0)=\sin(\pi x) & (0\leqslant x\leqslant 1) \end{cases} \end{array}$$

まず，図 37.1 に示すように xy 平面上に格子を描く．

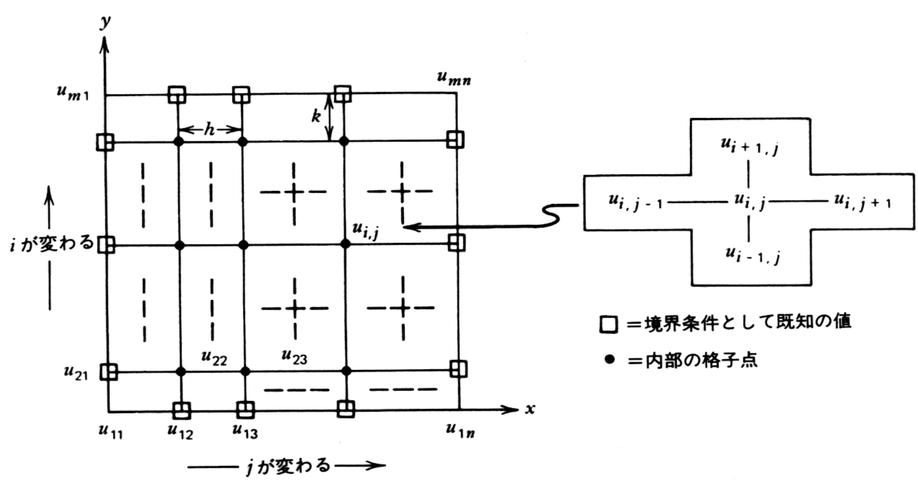


図 37.1　正方形内部の Dirichlet 問題用の格子

次の記法も便利である（特に計算機を使うときに）：

$$u(x,y)=u_{i,j}$$
$$u(x,y+k)=u_{i+1,j}$$
$$u(x,y-k)=u_{i-1,j}$$
$$u(x+h,y)=u_{i,j+1}$$
$$u(x-h,y)=u_{i,j-1}$$
$$u_x(x,y)=\frac{1}{2h}(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})$$
$$u_y(x,y)=\frac{1}{2k}(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})$$
$$u_{xx}(x,y)=\frac{1}{h^2}(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}) \qquad \text{（中心差分公式）}$$
$$u_{yy}(x,y)=\frac{1}{k^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})$$

この Dirichlet 問題を解く手順は，Laplace 方程式

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

の偏微分をその差分近似で置き変えることである．そうして，上記の簡略記法 $u_{i,j}$ を使うと，次のような差分方程式が得られる：

$$\nabla^2 u=\frac{1}{h^2}(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1})+\frac{1}{k^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})=0$$

二つの刻み幅 h と k を等しく取ると，Laplace 方程式は

(37.6) $$u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}=0$$

となり，これを $u_{i,j}$ について解けば

$$u_{i,j}=\frac{1}{4}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1})$$

となる．ここで $u_{i,j}$ は内部の格子点における近似解の値を表すことに注意せよ．この最後の式は，解 $u_{i,j}$ が近傍の 4 個の格子点の解の平均で近似できるということを述べている．そこで，Dirichlet 問題を解くための次のような数値計算法を作ることができる．

Dirichlet 問題を解くための数値計算アルゴリズム（Liebmann（リープマン）の方法）

ステップ 1 内部格子点における解 $u_{i,j}$ をすべての境界値の平均に等しく置

く（出発値としてはまあまあである）．

ステップ 2　すべての内部格子点を系統的に走査して，旧い近似値を近傍 4 点の平均で置き変える．どのような順序で走査するかでそれ程の差は出ないが，一般には，1 行ずつ（あるいは 1 列ずつ）順に走査をする．何回か反復すると，この反復過程は問題の近似解に収束するであろう．この過程の変化速度は一般に遅いが，いろいろな加速法もある．興味のある読者はこの課の“参考書 1”を参照されたい．

これで Dirichlet 問題の話は終わる．練習問題の中に Liebmann の方法を 3 回反復するという問題がある．

注意

1. $m=n=4$ のとき 4 個の内部格子点に対して式 (37.6) を書くと次の 4 元代数方程式が得られる：

$$\begin{aligned}&-4u_{22}+0+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+u_{23}+u_{32}=0\\ &-4u_{23}+u_{22}+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+0+u_{33}=0\\ &-4u_{32}+0+u_{22}+u_{33}+0=0\\ &-4u_{33}+u_{32}+u_{23}+0+0=0\end{aligned}\tag{37.7}$$

これを解いて u_{22}, u_{23}, u_{32}, u_{33} を定めることができる．このような連立方程式の解はいろいろな反復法で求めることができる．Liebmann の方法もその一つである．

2. 刻み幅 h と k をもっと小さくすると（したがって格子点をもっと多くすると），連立方程式 (37.7) の元数が大きくなるということの他は同じように解析できる．一般に，方程式の数は内部の格子点の数に等しい．

3. 連立方程式 (37.7) は行列の形に書くことができる：

$$\begin{bmatrix}-4 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22}\\ u_{23}\\ u_{32}\\ u_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\dfrac{\pi}{3}\\ -\sin\dfrac{2\pi}{3}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.86\\ -0.86\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

一般に方程式の数が多いと（1000 以上ということもある），この係数行列

は零をたくさん含んだ特殊な形をしている．このような“疎な”連立方程式を解くには特殊な数値計算法が使える．Jacobi（ヤコビ）法，Gauss-Seidel（ガウス・ザイデル）法，逐次加速緩和法（SOR）などの反復法が広く使われている（収束を早めるいろいろな技術も工夫されている）．

4. 境界条件に導関数が含まれる Neumann（ノイマン）問題を解くには，その導関数を差分近似で置き変えなければならない．

5. 差分法で次のような方程式も解くことができる：

　（a）$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$　（非同次方程式）

　（b）$xu_{xx}+u_{yy}+2u=\sin(x-y)$　（変数係数；非同次）

　（c）$(\sin x)u_{xx}+u_{xy}+3u=0$　（変数係数）

6. 問題の変域が不規則な形をしているときは，その領域の上に格子をかぶせ，まず，境界条件を補間することにより近くの格子点の解の近似値を作る．それから，普通のやり方で計算を進める．図 37.2 を見よ．

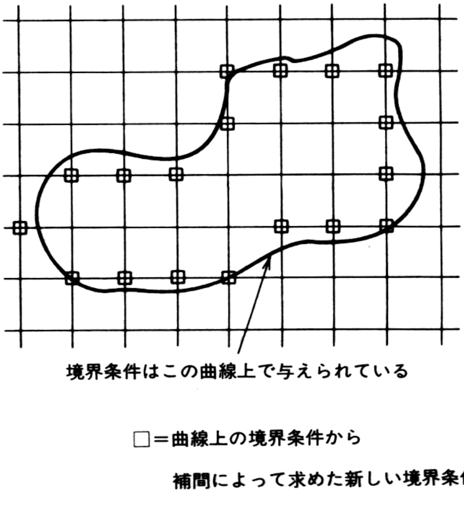


図 37.2

7. 偏微分方程式を解く計算機プログラムの目録を載せている雑誌がいくつかある．その中のいくつかを挙げると

　（a）*ACM Transactions on Mathematical Software*

（b）　*Computer Journal*

（c）　*Numerische Mathematik*

（d）　*BIT*

さらに，ELLPACK と呼ばれる広い範囲をカバーしたプログラム・パッケージが，かなり一般的な楕円型境界値問題を解く目的で最近設計された．このプログラム・パッケージは，2次元あるいは3次元のいろいろな座標系，任意の境界，一般の境界条件の多種多様な問題をいろいろな方法* を組み合わせて解くものである．

練習問題

1. 2次導関数 $f''(x)$ の近似式（39.4）

$$f''(x)\cong\frac{1}{h^2}[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)]$$

を導け．

2. Dirichlet 問題（37.5）に対して Liebmann の反復法の反復計算を2回実行せよ．この方法は収束するか．

3. 次のような正方形内部の Poisson（ポアソン）方程式を差分近似を使って解くときには，どのような代数方程式を解かなければならないか．

偏微分方程式　$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$　$(0<x<1,\ 0<y<1)$

境界条件　$u(x,y)=g(x,y)$　（境界上で）

4. 偏微分方程式　$u_{xx}+u_{yy}+2u=0$　$(0<x<1,\ 0<y<1)$

境界条件　$u(x,y)=g(x,y)$　（境界上で）

の微分を差分で置き変えるとどのような代数方程式を解かなければならないか．

5. 正方形内部の Neumann 問題

偏微分方程式　$u_{xx}+u_{yy}=0$　$(0<x<1,\ 0<y<1)$

境界条件　$\begin{cases} u=0 & \text{（正方形の上，下，左側の辺上で）} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y)=1 & (0\leqslant y\leqslant 1) \end{cases}$

を差分法で解くにはどうすればよいか．

6. 任意の数の格子について正方形内部の Dirichlet 問題

偏微分方程式　$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$　$(0<x<1,\ 0<y<1)$

境界条件　$u(x,y)=g(x,y)$　（境界上で）

---

* このプログラムについての情報を得たい人は，Dr. John Rice, ELLPACK User's Guide CSD-TR 226, Computer Center, Purdue University, West Lafayette, Indiana 47907, U.S.A. に連絡をとるとよい．

を解く流れ図を描け．プログラム言語を知っているなら，その計算をするプログラムを書け．

参考書

1. W. F. Ames, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Academic Press, 1977. 最新の権威ある数値計算法の教科書である．
2. S. S. Kunz, *Numerical Analysis*, McGraw-Hill, 1964. 第13章には偏微分方程式論における数値的な方法についての明快で正確な要約が載っている．
3. G. D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Oxford University Press, 1965. 偏微分方程式論における差分法について簡潔に書いた本である．明快に書かれている．

第38課　陽的差分法

目的：　陽的差分法の考え方を導入し，双曲型の問題および放物型の問題を解くときのその使い方を示すこと．基本的な考え方は

$$u_t = u_{xx}$$

というような偏微分方程式を差分近似で置き変えると，ある時刻の解をそれ以前の時刻の解を使って陽に解くことができる，というものである．こうすると，時刻をどんどん増しながら次々と解を求めていくことによって，初期値・境界値問題（双曲型あるいは放物型の）を解くことができる．

しかし，われわれは次のような問題に直面する．すなわち，差分が微分をより正確に表すように格子点の間隔を小さくするにつれて，計算回数が増し，丸めの誤差が増すということである．

前の課では楕円型境界値問題（定常状態問題）を解いたが，そこでは与えられたある空間領域で偏微分方程式が満たされているとし，解（あるいはその微分）が境界上で指定されているとした．そのような型の問題では，連立代数方程式を解いて内部の格子点における解の近似値を得た．いいかえれば，すべての内部の格子点の解を同時に求めるほかなかった．

この課では，時間に依存する問題を差分近似で解く方法を示す．ここでの考え方は，時刻が零の時の解が与えられれば，行進過程によって $t=\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \cdots$ の解を求めることができる，というものである．空間と時間の両方の微分を差分近似で置き変えることによって，その差分方程式の中の $u_{i,j}$ をそれ以前の時刻の解を使って陽に解き表すことができる．ある1時点での解をそれ以前の時刻の解を使って表すので，この過程のことを**陽的行進過程**と呼ぶ．

この方法がどんな働きをするかを見せるために，熱流の代表的な問題を考えてみよう．

放物型方程式に対する陽的解法

棒の初期温度が零で，それ以後棒の左端が温度1に保たれ，右端ではそこの温度と外部の温度（$g(t)$ とする）との差に比例する熱損失（あるいは利得）があるという場合の，棒に沿っての熱流問題を考えよう．すなわち，問題

偏微分方程式 $u_t=u_{xx}$ $(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件 $\begin{cases} u(0, t)=1 \\ u_x(1, t)=-[u(1, t)-g(t)] \end{cases}$ $(0<t<\infty)$

初期条件 $u(x, 0)=0$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

を解こう．この問題を差分法で解くために，まず格子点

$$x_j=jh \quad (j=0, 1, 2, \cdots, n)$$

$$t_i=ik \quad (i=0, 1, 2, \cdots, m)$$

を有する普通の矩形格子を描く．図 38.1 を見よ．

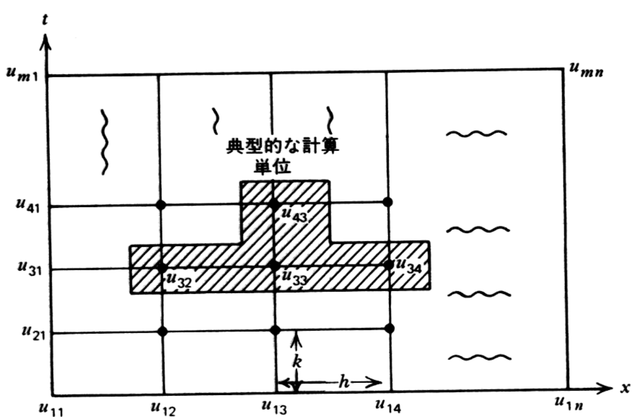


図 38.1 熱流問題のための格子

図 38.1 において，左端と下端の $u_{i,j}$ は境界条件と初期条件によって与えられるから，われわれの仕事はその他の $u_{i,j}$ を求めることである．そこで，熱伝導方程式における偏導関数 u_t と u_{xx} を次の近似式で置き変える．

$$u_t=\frac{1}{k}[u(x, t+k)-u(x, t)]=\frac{1}{k}(u_{i+1,j}-u_{i,j})$$

$$u_{xx}=\frac{1}{h^2}[u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)]=\frac{1}{h^2}(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1})$$

これらの式を $u_t=u_{xx}$ に代入し，最大の時刻における解 $u_{i+1,j}$ について解くと

(38.2)★
$$u_{i+1,j}=u_{i,j}+\frac{k}{h^2}[u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}]$$

となる．これはある1時点における解をそれ以前の時刻における解で表すものであるから，求める公式である（指標 i が時刻を表していることに注意せよ）．図 38.1 に，どこの解がこの公式の中で互いに関係しているかが示されている．

さていよいよ計算を開始するわけであるが，その前にまず，正方形の右の辺における境界条件

$$u_x(1,t)=-[u(1,t)-g(t)]$$

の中の導関数を

(38.3)
$$\frac{1}{h}[u_{i,n}-u_{i,n-1}]=-[u_{i,n}-g_i]$$

で近似しなければならない．ここで $g_i=g(ik)$ は与えられている値である．$u_x(1,t)$ を前進差分近似で置き変えようとすると，領域の外側の $u_{i,j}$ の値を知る必要が出てくるので，後退差分近似で置き変えたことに注意せよ．この境界条件を $u_{i,n}$ について解くと

(38.4)
$$u_{i,n}=\frac{u_{i,n-1}+hg_i}{1+h}$$

を得る．この式と陽的公式 (38.2) を使って計算を開始することができる．

陽的解法のアルゴリズム

ステップ 1　$t=\varDelta t$ での格子点における解を陽的公式

$$u_{2,j}=u_{1,j}+\frac{k}{h^2}[u_{1,j+1}-2u_{1,j}+u_{1,j-1}]\quad (j=2,3,\cdots,n-1)$$

を使って求める．図 38.2 を見よ．

ステップ 2　公式 (38.4) から $u_{2,n}$ を求める．

$$u_{2,n}=\frac{u_{2,n-1}+hg_2}{1+h}$$

ステップ1とステップ2は $t=\varDelta t$ の解を与える．$t=2\varDelta t$ の解（図 38.2 の下から2行目）を得るには，1段上に移動して（すなわち，i を1だけ増し

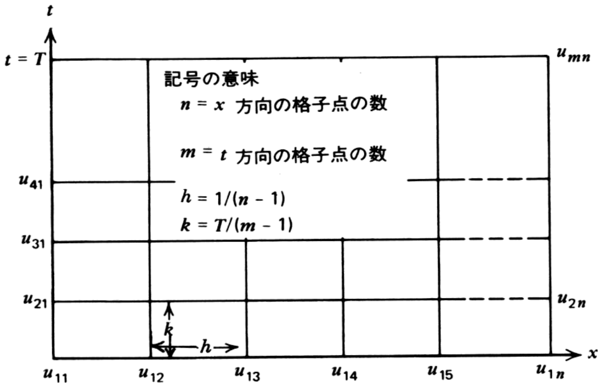


図 38.2 陽的解法の説明図

て）いま計算した $u_{i,j}$ の値を使ってステップ1とステップ2を繰り返す．$t=3\,\Delta t, 4\,\Delta t, \cdots$ に対しても，同じ過程を繰り返す．

読者がこの方法を計算機にのせられるように，この方法のかなり詳しい流れ図を図 38.3 に示す．流れ図に慣れていない学生は，この図を計算のアルゴリズムと詳しい計算機プログラムとを結ぶ中間のつなぎと思っていればよい．流れ図は計算のし方を正確に説明するものである．

入力：$N=x$ 方向の格子点の数
$M=t$ 方向の格子点の数
$T=t$ の最大値
$G(i)=g(t_i)$ $(i=1, 2, \cdots, M)$

↓

刻み幅の計算：$H=1/(M-1)$
$K=T/(N-1)$

↓

比 R の計算：$R=K/H^2$

↓

N 個の初期条件 $u(x, 0)=0$ を $M\times N$ の配列 $U=U(i, j)$ の第1行に入れる．図 38.4 を見よ．

↓

M 個の境界条件 $u(0, t)=1$ を配列 U の第1列に入れる．

↓

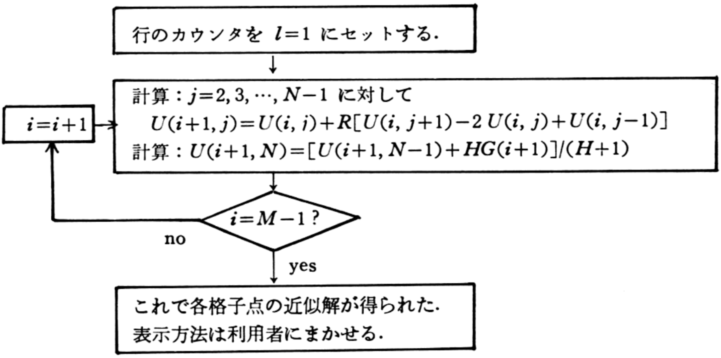


図 38.3　陽的解法の流れ図

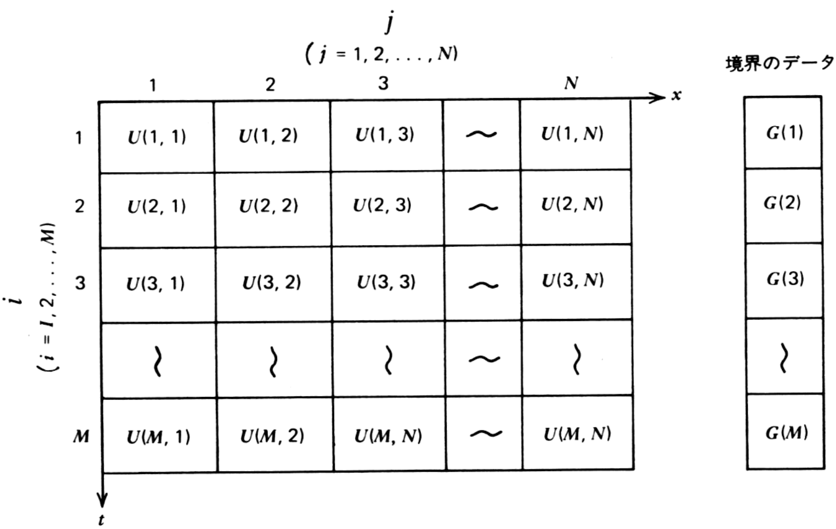


図 38.4　陽的解法で用いる配列

注意

1. 陽的解法には重大な欠点がある．なぜかというと，t の刻み幅が x の刻み幅に比較して大きくなると，誤差が拡大されて解の正確さを破滅させるまでになるからである．これら二つの数，すなわち x の刻み幅 h と t の刻み幅 k の相対的大きさをいくらにすべきかは，個々の方程式，境界条件によ

るが，一般には t の刻み幅 k は x の刻み幅 h よりずっと小さくなければならない．この課の“参考書”の第3章には，この方法がうまく働くためには $k/h^2 \leqslant 0.5$ でなければならないということが証明されている．

2. 大ざっぱにいって，刻み幅 $\Delta t=k$ と $\Delta x=h$ を小さくすればするほど打ち切り誤差，すなわち偏微分を差分で近似するときの誤差が小さくなるという原則はある．しかし，これらの刻み幅を小さくすればするほど，計算が余計に必要となり，四捨五入のための丸め誤差が増える．したがって，図38.5に示すような現象が起きる．

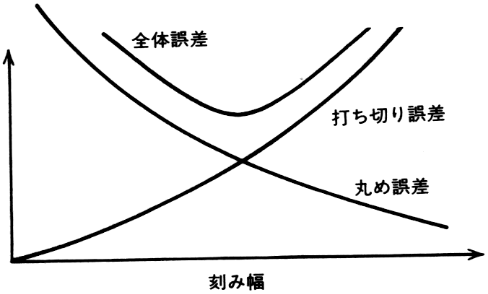


図 38.5　刻み幅の関数としての全体誤差

3. 双曲型の問題

$$\text{偏微分方程式}\quad u_{tt}=u_{xx}\quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$$

$$\text{境界条件}\quad \begin{cases} u(0,t)=g_1(t) \\ u(1,t)=g_2(t) \end{cases}\quad (0<t<\infty)$$

$$\text{初期条件}\quad \begin{cases} u(x,0)=\phi(x) \\ u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}\quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

もまた陽的差分法によって解くことができる．ここでは導関数 u_{tt} と u_{xx} を

$$u_{tt}\cong\frac{1}{k^2}[u(x,t+k)-2u(x,t)+u(x,t-k)]$$

$$u_{xx}\cong\frac{1}{h^2}[u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)]$$

で近似し，初期条件の導関数 $u_t(x,0)$ を

$$u_t(x,0)\cong\frac{1}{k}[u(x,k)-u(x,0)]=\frac{1}{k}[u(x,k)-\phi(x)]$$

で近似できる．したがって，これらの式をまとめて $u(x,t+k)$ をそれ以前の時刻の解を使って陽に表すと

$$u(x,t+k)=2u(x,t)-u(x,t-k)+\left(\frac{k}{h}\right)^2[u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)] \tag{38.5}$$

が得られる．この式を用いるには二つ前の時点の解まですでに知っていなければならないことは明らかである．したがって，計算を開始するには，初速度の条件

$$\frac{1}{k}[u(x,k)-\phi(x)]=\psi(x)$$

を使わなければならない．これを $u(x,k)$ について解くと $u(x,k)=\phi(x)+k\psi(x)$ となり，これから $t=\Delta t=k$ のときの解が求められる．それ以後のすべての時刻における解は陽的な公式 (38.5) から求められる．

練習問題

1. 熱伝導問題

   偏微分方程式　$u_t=u_{xx}$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

   境界条件　$\begin{cases}u(0,t)=0\\u(1,t)=0\end{cases}$　$(0<t<\infty)$

   初期条件　$u(x,0)=\sin(\pi x)$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$

   の差分解を陽的解法により $t=0.005,\ 0.010,\ 0.015$ に対して求めよ．$h=\Delta x=0.1$ とせよ．$t=0.015$ に対して $x=0,\ 0.1,\ 0.2,\cdots,0.9,\ 1$ の解をグラフに描け．
2. 練習問題1を解析的に（変数分離法で）解いて，その解の格子点 $x=0,\ 0.1,\ 0.2,\cdots,0.9,\ 1$ における値を $t=0.015$ に対して計算せよ．この結果と練習問題1の数値解とを比較せよ．（ちょっとした計算機プログラムを書いたり電卓を使ったりして変数分離の解を計算してもよい．
3. この課の“注意3”で触れた双曲型の問題の計算を実行するための計算の流れ図を書け．
4. 練習問題1の $x=1$ における境界条件を

   $$u_x(1,t)=-[u(1,t)-1]$$

   で置き変えて解け．

参考書

G. F. Forsythe, W. R. Wasow, *Finite-Difference Methods for PDEs*, John Wiley & Sons, 1960. 物理的な例をたくさん挙げてある優れた教科書である. 土地の排水の問題, 油の流れの問題, 気象予報の問題なども取り上げられている.

第39課　陰 的 差 分 法 (Crank-Nicolson 法)

目的：　時間に依存する問題を陰的解法という名のもう一つの差分法により解く方法を示すこと．この方法では，前の課と同様に，問題の中の偏導関数を差分近似で置き変えるが，陽的解法（$u_{i+1,j}$ をそれ以前の値で陽に表した）とは異なって，陰的解法では最大の時刻での解を求めるために連立方程式を解く．いいかえれば，新しい時点における解は連立代数方程式を解くことによってすべてを同時に求めるのである．

陰的解法は，誤差が過大に累積するのを心配せずに刻み幅を大きくできるので，陽的解法より優っている．

Crank–Nicolson（クランク・ニコルソン）法と呼ばれ，広く普及している方法が，放物型問題を解くのに使われる．

前の課で論じた陽的解法が使いにくいのは，時間の刻み幅を十分小さくしないとうまい結果が得られないという点である．具体的にいって，簡単な熱流の問題

$$
\text{(39.1)}\qquad
\begin{array}{lll}
\text{偏微分方程式} & u_t = u_{xx} & (0<x<1,\ 0<t<\infty) \\
\text{境界条件} & \begin{cases} u(0,t) = g_1(t) \\ u(1,t) = g_2(t) \end{cases} & (0<t<\infty) \\
\text{初期条件} & u(x,0) = f(x) & (0 \leqslant x \leqslant 1)
\end{array}
$$

を陽的解法で解くとすると，この方法が数値的に安定でなければならない（誤差が成長してはならない）から，刻み幅 Δt と Δx とが

$$
\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leqslant 0.5
$$

という関係を満たす必要がある．この数値的安定性の詳細についてはこの課の“参考書1（45 ページ)”を見よ．上の関係式は，たとえば，x 方向の刻み幅

Δx を $\Delta x=0.1$ と選んだら，時間の増分 Δt は $\Delta t\leqslant 0.5(\Delta x)^2=0.005$ でなければならない（したがって，$t=0$ から $t=1$ までの間を 200 段に分けることになる）.

しかし，1段あたりの計算を余計にすることにより刻み幅をもっと大きく取ることができるような方法（陰的解法）がある．この解法では，各段ごとに連立代数方程式を解くことにより，かなり大きな刻み幅を使うことができる．この方法がどのように働くかを説明するために，次の熱流問題を解こう．

熱流問題の陰的解法による解

次の問題を考えよう：

$$
\text{(39.2)}\quad
\begin{aligned}
&\text{偏微分方程式}\quad u_t=u_{xx}\quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)\\
&\text{境界条件}\quad \begin{cases} u(0,t)=0\\ u(1,t)=0\end{cases}\quad (0\leqslant t\leqslant\infty)\\
&\text{初期条件}\quad u(x,0)=1\quad (0<x<1)
\end{aligned}
$$

偏導関数 u_t と u_{xx} を次の近似式で置き変える：

$$
u_t(x,t)\cong\frac{1}{k}[u(x,t+k)-u(x,t)]
$$

$$
u_{xx}(x,t)\cong\frac{\lambda}{h^2}[u(x+h,t+k)-2u(x,t+k)+u(x-h,t+k)]
+\frac{(1-\lambda)}{h^2}[u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)]
$$

ここで λ は区間 $[0,1]$ の中に選ばれた数である．u_{xx} の近似式が時刻 t および $t+k$ における導関数 u_{xx} の中心差分近似の加重平均であることに注意せよ．これら二つの中心差分の普通の平均が $\lambda=0.5$ の特殊な場合である．また，$\lambda=0.75$ ならばそれぞれに 0.75 と 0.25 の重みを掛けて平均したのが上の近似式である．（$\lambda=0$ ならば，前の課で用いた普通の陽的差分法になることに注意せよ.）

上記の u_t と u_{xx} の近似式をわれわれの問題に代入すると，新しい差分問題

$$
\text{(39.3)}\quad
\text{差分方程式}\quad \frac{1}{k}(u_{i+1,j}-u_{i,j})
=\frac{\lambda}{h^2}(u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1})
+\frac{(1-\lambda)}{h^2}(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1})
$$

境界条件　$\begin{cases} u_{i,1}=0 \\ u_{i,n}=0 \end{cases}$　$(i=1, 2, \cdots, m)$

初期条件　$u_{1,j}=1$　$(j=2, \cdots, n-1)$

が得られる．図 39.1 を見よ．

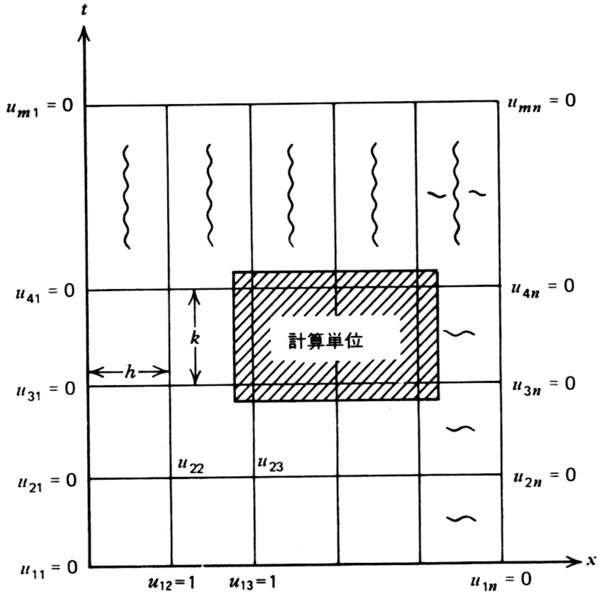


図 39.1　陰的解法用の格子 $(\Delta x=0.2)$

さて，(39.3) の差分方程式において一番大きな時間の添字（添字 i）をもつ $u_{i,j}$ を式の左辺に集めると

(39.4)
$$-\lambda r u_{i+1,j+1}+(1+2r\lambda)u_{i+1,j}-\lambda r u_{i+1,j-1}$$
$$=r(1-\lambda)u_{i,j+1}+[1-2r(1-\lambda)]u_{i,j}+r(1-\lambda)u_{i,j-1}$$

となる．ただし，便宜上 $r=k/h^2$ と置いた．添字 i を固定して j を 2 から $n-1$ まで動かすと，$n-2$ 個の未知数 $u_{i+1,2}, u_{i+1,3}, u_{i+1,4}, \cdots, u_{i+1,n-1}$（これは $(i+1)\Delta t$ における内部格子点である）に関する $(n-2)$ 元連立方程式になる．

この公式にどの $u_{i,j}$ が関係しているかを正確に理解する助けとするため，この公式を図 39.2 に示すような記号でパターン化して書き表すとよい．

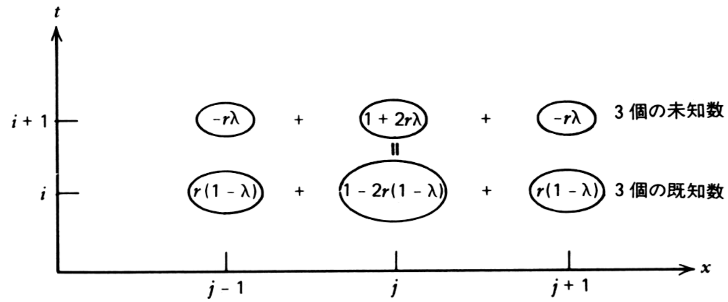


図 39.2　陰的公式のパターン

次に問題 (39.2) の解を作るのに式 (39.4) を使う使い方を示そう.

熱伝導問題 (39.2) の陰的アルゴリズムス

ステップ 1　λ をある値に選ぶ ($0 \leqslant \lambda \leqslant 1$). $\lambda=0$ なら, 式 (39.4) は第 38 課で展開した陽的公式と同じになることに注意せよ.

ステップ 2　$h=\Delta x=0.2$, $k=\Delta t=0.08$ ($r=k/h^2=2$) とする. x 方向には 6 個の格子点 (4 個の内部格子点) があることになる (図 39.1 を見よ). また加重パラメータを $\lambda=0.5$ としよう (これが Crank–Nicolson 法と呼ばれるものである). 上記の公式 (39.4) を第 1 行と第 2 行 (すなわち $i=1$) に適用し, 左から右へ動かす ($j=2,3,4,5$) と, 次の 4 個の方程式が得られる：

$$-u_{21}+3u_{22}-u_{23}=u_{11}-u_{12}+u_{13}=1$$
$$-u_{22}+3u_{23}-u_{24}=u_{12}-u_{13}+u_{14}=1$$
$$-u_{23}+3u_{24}-u_{25}=u_{13}-u_{14}+u_{15}=1$$
$$-u_{24}+3u_{25}-u_{26}=u_{14}-u_{15}+u_{16}=1$$

内部格子点における 4 個の未知数 $u_{22}, u_{23}, u_{24}, u_{25}$ を式の左辺に置いて行列の形で書くと,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{22} \\ u_{23} \\ u_{24} \\ u_{25} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{39.5}$$

となる. この形の連立方程式は **3 重対角系**と呼ばれるものである. これを解くには, 一般に,

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ \\ d_n \end{bmatrix}$$

という形の3重対角系をそれに同値な形

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1^* & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & c_2^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_3^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & c_{n-1}^* \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^* \\ d_2^* \\ d_3^* \\ \vdots \\ \\ d_n^* \end{bmatrix}$$

に変換する方法を使う．ここで，

$$c_1^* = c_1/b_1, \quad c_{j+1}^* = \frac{c_{j+1}}{b_{j+1} - a_j c_j^*} \quad (j=1, 2, \cdots, n-2)$$

$$d_1^* = d_1/b_1, \quad d_{j+1}^* = \frac{d_{j+1} - a_j d_j^*}{b_{j+1} - a_j c_j^*} \quad (j=1, 2, \cdots, n-1)$$

である．この変換はごくすなおなものである．元の連立方程式をそれに同値な形に書き変えただけである．要は，連立方程式をこの新しい形に書き直しさえすれば解くのが易しくなるということである．すなわち，下から上へと解いていくと，

$$x_n = d_n^*, \quad x_j = d_j^* - c_j^* x_{j+1} \quad (j=n-1, n-2, \cdots, 2, 1)$$

のようにして x_j が求められる．この方法をわれわれの4元連立方程式 (39.5) に適用すると

$$u_{22} = 0.60$$
$$u_{23} = 0.80$$
$$u_{24} = 0.80$$
$$u_{25} = 0.60$$

が得られる．これらが $t = \Delta t$ での内部格子点における解（近似解）である．この値が求まったら，次の時刻に移り，新しい連立方程式を解く．

この陰的解法によると，各時刻における解を計算するのに陽的解法よりも余

計な手間がかかる．しかし，より大きな Δt を選ぶことができて，しかもよい近似が得られる．

練習問題

1. (39.3) の差分方程式から方程式 (39.4) を導け．
2. 問題

偏微分方程式　$u_t=u_{xx}$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=1 \\ u_x(1,t)+u(1,t)=g(t) \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=0$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$

を陰的差分法で解くにはどうするか．

3. 偏微分方程式　$u_t=u_{xx}+u$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件　$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases}$　$(0<t<\infty)$

初期条件　$u(x,0)=1$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$

を陰的解法で解くにはどうするか．

4. $\lambda=1$ とすると式 (39.4) の計算のパターンはどうなるか．
5. 熱流問題 (39.2) を解くための流れ図を書け．計算機が使えるなら計算機のプログラムを書け．パラメータ λ のいろいろな値に対して，簡単な初期条件 $u(x,0)=\sin(\pi x)$ の下でこの問題を数値的に解いてみることは良い経験となるであろう．真の解析解はこの場合は

$$u(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$$

であるが，λ のいろいろな値に対する数値解を真の解析解の値と比較してみよ．

6. 連立代数方程式 (39.5) をこの課で与えられている公式を使って解け．

参考書

W. F. Ames, *Numerical Methods in PDEs*, Academic Press, 1977. 流体力学と弾性論への応用を含む優れた本である．

第40課　解析解と数値解

目的：偏微分方程式の解析解と数値解とを比較してその長所と短所を論じること．物理量の同定（パラメータ同定）をする際に数学モデルが重要であることを述べる．そして，生物学における重要な例を論じる．

おそらくこの辺で，解析解と数値解との比較をしてその長所と短所を論じるべきであろう．まず第一に，解析解とか数値解とかいうときにそれらが何を意味しているのかについてはっきりさせておこう．

解析解の意味

解析解とは，その系の独立変数とパラメータの“式”として未知変数 u が表されているような解のことで，一般には無限級数とか積分とかで表される．

数値解の意味

一方，数値解とは，微分方程式をより易しい近似式で置き変えてそれを解くことにより偏微分方程式の解を求めることをいう．たとえば，差分近似法では，偏微分を差分で置き変え，差分方程式を解くことにより偏微分方程式の解の近似を作る．結果は，一般に，独立変数のいろいろな値に対する解 u の値を表にしたものとなる．

これらの二つの型の解の基本的な意味はわかったとして，どちらがよいかについて考察しよう．

数値解と解析解の比較

簡単な放物型の初期値・境界値問題

$$\text{偏微分方程式}\quad u_t=\alpha^2 u_{xx}\quad (0<x<1,\ 0<t<\infty)$$

$$
(40.1)\qquad \text{境界条件}\quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \quad (0<t<\infty)
$$

$$
\text{初期条件}\quad u(x,0)=1 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)
$$

を考えて，その解を図 40.1 に示す（$\alpha=1$）.

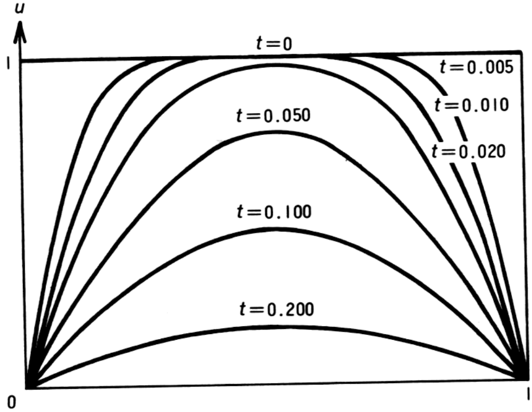


図 40.1　熱伝導方程式（40.1）のいろいろな時刻における解

ここで，この問題に対して解析解（式（40.2））

$$
(40.2)\bigstar\quad u(x,t)=\frac{4}{\pi}\left[e^{-(\pi\alpha)^2t}\sin(\pi x)+\frac{1}{3}e^{-(3\pi\alpha)^2t}\sin(3\pi x)+\cdots\right]
$$

と数値解（表 40.1：$\alpha=1$ としてある）

表 40.1

		x										
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0.01	0	0.52	0.84	·	·	·	·	·	0.84	0.52	0
	0.02	0	0.38	·	·	·	·	·	·	·	0.38	0
t	0.03	0	·	·	·	·	·	·	·	·	·	0
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

のどちらが望ましいかという質問が出るであろう．これはよい質問である．答えは，われわれがその解をどう使おうとしているかによって異なる．しかし，これら二つの型の解にはそれぞれ明らかな長所がある．まず長所について考えよう．

解析解の長所

1. 式 (40.2) が数値の表よりもたくさんの情報を含んでいることは明らかである．特定のどんな点 (x, t) に対してもそこでの解の値を計算したければ，無限級数の十分多くの項を足すだけでどんな精度まででも計算できる．誤差の上界を求めるのもそう難しくない．
2. ある1点 (x, t) の解だけが求めたいときには，陽的あるいは陰的解法による数値解では行進過程を完全に実行して他のすべての点の解を求めなければならないのに，解析解ではそのようなことをせずに直接その1点の値だけの計算ができる．
3. 解析解では格子点に限らず任意の点の解を求めることができる．
4. おそらくこれが一番大切なことであろうが，いろいろな物理パラメータ，初期条件，境界条件などが解にどんな影響を与えるかが，解析解からはただちにわかる．

数値解からは上の4のような相互関係は見られない．なぜかというと，数値解は特定のパラメータの値と，特定の初期条件，境界条件について計算されるものであるからである．解から逆にパラメータを推定することが目的であって，したがって，モデルのパラメータと解との関係を知ることがぜひとも必要であるというような場合も多い．たとえば，解 u が実験による測定からわかっていて，そしてさらに解析解とパラメータの関係

★　　u＝パラメータの関数

がわかっているとすると，

★　　パラメータ＝u の関数＝データの関数

という形で，パラメータをデータの関数として，原理的には，解き表すことができる．

このような考え方を**パラメータの同定**と呼ぶ．偏微分方程式の解についての研究の主な目的の一つがこれである．この課の後半で，生物学におけるパラメータ同定の重要な例を挙げる．しかし，その前に，なぜ数値解が大切であるのかを見ておこう．

数値解の長所

数値解には一つ重要な利点がある．それは，たいていの問題には解析解が知

られていないということである．実際上すべての非線形偏微分方程式は数値計算によって解かなければならない．なぜならば，物理学，化学，生物学，などの現実的モデルのほとんどは本質的に非線形だからである．線形モデルというのは，たいていの場合，非線形成分を捨て去った残りの近似なのである．

1. 非線形波動方程式　$u_{tt}=u_{xx}+f(u)$
2. 反応-拡散方程式　$u_t=u_{xx}+f(u)$
3. Hodgkin-Huxley（ホジキン・ハックスレー）の方程式

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+f(u,v) \\ v_t=g(u,v) \end{cases}$$

のような非常に重要な非線形方程式は，任意の非線形項 f と g に対する解析解が知られているというわけではなかった．したがって，ほとんどの非線形問題（そしてある種の線形問題も）に対する一般的な方法としては数値解が使われている．

さて，重要な物理パラメータを求めるのに解析解を利用する方法の一例を考えよう．この問題の詳細はこの課の終わりの“参考書”の中にある．

パラメータの同定（生物学における例）

外部原形質溶液の中でカリウムイオン（K^+）がどのくらい速く拡散するかを知ろうとしている生物学者がいるとしよう．拡散係数がわかれば，軸索に沿って神経インパルスが伝わる伝わり方についていろいろのことがいえる．問題は，この拡散係数を実際に直接測定することは不可能であるということである．しかし，カリウム濃度 $u(x,t)$ と拡散係数 D の間の数学的関係を見いだすことならわれわれにできる．したがって，$u(x,t)$ を測定することによって D を見いだすことができる．次の例題では，このようなやり方がどのように効果を上げるかを示そう．

生物学者の Hodgkin（ホジキン）と Keyes（ケイズ）は，槍烏賊（ヤリイカ）の軸索を取り出して特殊な塩の溶液の中に漬けておくと，軸索に沿っての放射性カリウム（^{42}K）の濃度が，最初は，曲線

$$u(x,0)=Ae^{-x^2/a}$$

で近似できることを発見した．すなわち，観測データの点にこの式が合うように曲線のパラメータ A と a を定めた（最小二乗法による当てはめ）．図 40.2 を見よ．

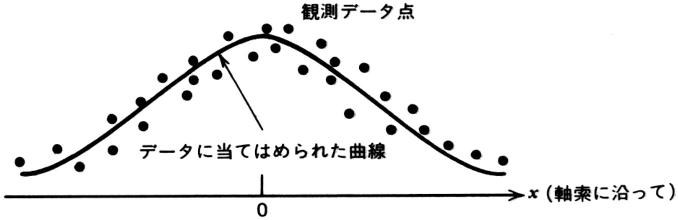


図 40.2　^{42}K の初期濃度

また，この初期濃度から始めて，その後，正常な環境におくと，対流と拡散の両方によってカリウムが軸索に沿って流れて濃度が下がることも確認した．したがって，Hodgkin と Keyes は濃度 u を対流・拡散型の初期値問題

(40.3)　偏微分方程式　$u_t=Du_{xx}-Vu_x$　$(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$
　　　初期条件　$u(x,0)=Ae^{-x^2/a}$　$(-\infty<x<\infty)$

で記述できると仮定した．この問題は，第15課において，動座標系に変換することによって解かれたものである．読者は覚えておられるであろうが，動座標系という考え方は，一般にいって，Vのことをひとまず忘れて，純粋な拡散問題を解いて

$$u(x,t)=\frac{A}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2/a}e^{-(x-\xi)^2/4Dt}d\xi$$

$$=\frac{A\sqrt{a}}{\sqrt{a+4Dt}}e^{-[x^2/(a+4Dt)]}$$

という解（これは $V=0$ のときの問題の解である）を得るということであった．この x の代りに $x-Vt$ を代入すると，元の問題 (40.3) の解が得られる．すなわち

$$u(x,t)=\frac{A\sqrt{a}}{\sqrt{a+4Dt}}e^{-[(x-Vt)^2/(a+4Dt)]} \tag{40.4}$$

である．Hodgkin と Keyes は V を直接測定できることにも成功したので，式 (40.4) は ^{42}K の濃度と拡散係数 D との関係を与える式であるということになった（A, a, V はすべて既知）．軸索上のある固定点 x_0 においていろいろな時刻でカリウムの濃度を測定するように実験を計画することによって，彼らは理論曲線 (40.4) がなるべくよくデータに当てはまるような D の値を求めることができた（図 40.3）．

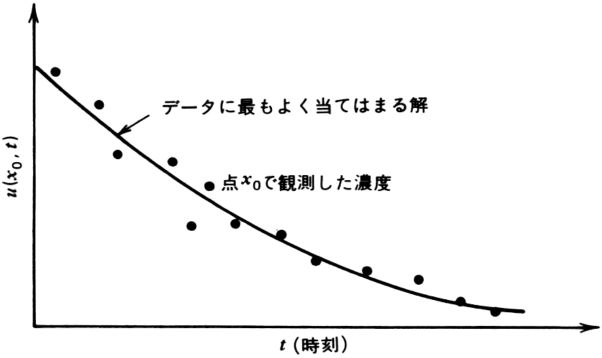


図 40.3　観測データへの曲線 $u(x_0, t)$ の当てはめ

すなわち，拡散係数 D の値をいろいろに変えて選ぶと，いろいろ異なる曲線 $u(x_0, t)$ が得られる．したがって，偏微分方程式の解が実験データに最もよく当てはまるような D の値を選べばよい．彼らの実験によって，Hodgkin と Keyes は外部原形質中の K^+ の拡散係数が $D=1.5\times10^{-9}\,\mathrm{m^2/s}$ であることを見いだした．

練習問題

1. 解析解（40.2）を用いて問題（40.1）のパラメータ α を推定するにはどのような実験をすればよいか．
2. 最小二乗近似というのは曲線とデータ点との間の距離の二乗の和（SS）を最小にするようなものである．たとえば，データ点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ を最小二乗近似する直線 $y(x)=a+bx$ は

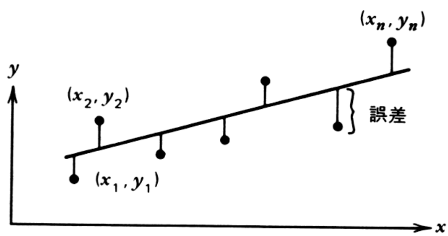


図 40.4　データ点の最小二乗近似

$$SS=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bx_i)]^2$$

を最小にするような特別の直線である（図 40.4 を見よ）.

この直線が最小二乗近似になるように，定数 a と b をデータ点 (x_i, y_i) の関数として表せ.

3. 生化学における重要な問題の一つに，巨大分子ミオグロビンの分子量を決定する問題がある．この分子量を決定するために，血液を超遠心分離機（非常に高速度の遠心分離機）に入れ，ある定められた時間だけ回すという方法もある．遠心分離機内の液体の濃度を表す方程式は **Lamm（ラム）の方程式**

$$u_t=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(Dru_r-s\omega^2r^2u) \quad (0<r<1)$$

として知られている．ここで，

r ＝遠心分離機の中心からの距離

D ＝拡散係数（これがミオグロビンの分子量に関係する）

s ＝沈降係数（実験的に定められる）

ω ＝遠心分離機の角速度（既知）

$u(r, t)$ ＝遠心分離機内の媒質の濃度

ミオグロビンの分子量を求めるこの方法は，Lamm の方程式で $u_t=0$ と置いて $u(r, \infty)$ についての常微分方程式を解き，定常状態の解 $u(r, \infty)$ を求めることである．この定常状態の解 $u(r, \infty)$ を使ってミオグロビンの分子量を推定するための実験はどのようにすればよいか考えよ.

参考書

S. I. Rubinow, *Introduction to Mathematical Biology*, John Wiley & Sons, 1976.
この教科書には，偏微分方程式の生物学へのいくつかの応用例が載っている.

第 41 課　偏微分方程式の分類
(放物型の方程式と楕円型の方程式)

目的：　2 階の線形方程式

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$$

に対して，

$$B^2-4AC=0 \quad (\text{放物型})$$

$$B^2-4AC<0 \quad (\text{楕円型})$$

のそれぞれの場合に新しい座標系 (ξ,η) を導入し，方程式がそれぞれ標準形

$$u_{\eta\eta}=\phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \qquad (\text{放物型の標準形})$$

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \quad (\text{楕円型の標準形})$$

に書けることを示すこと．

第 23 課において，一般の 2 変数の 2 階の線形方程式

(41.1)　$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$$

を三つの基本型に分類した．特に，双曲型の方程式は二つの標準形に変換された．

この課では，放物型の方程式と楕円型の方程式がどうすれば標準形に変形できるかを示そう．

放物型の方程式の標準形への変形

今の場合，$B^2-4AC=0$ であるとして (41.1) の形の方程式を考え，その方程式が

$$u_{\eta\eta}=\phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

という形になるように新しい座標系 (ξ,η) を導入する．方程式 (41.1) を新し

い座標 $\xi=\xi(x,y)$ と $\eta=\eta(x,y)$ を使って書き変えると，前と同種の方程式

$$\bar{A}u_{\xi\xi}+\bar{B}u_{\xi\eta}+\bar{C}u_{\eta\eta}+\bar{D}u_{\xi}+\bar{E}u_{\eta}+\bar{F}u=\bar{G} \tag{41.2}$$

が得られる．ここで，

$$\begin{aligned}
\bar{A}&=A\xi_x{}^2+B\xi_x\xi_y+C\xi_y{}^2\\
\bar{B}&=2A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+2C\xi_y\eta_y\\
\bar{C}&=A\eta_x{}^2+B\eta_x\eta_y+C\eta_y{}^2\\
\bar{D}&=A\xi_{xx}+B\xi_{xy}+C\xi_{yy}+D\xi_x+E\xi_y\\
\bar{E}&=A\eta_{xx}+B\eta_{xy}+C\eta_{yy}+D\eta_x+E\eta_y\\
\bar{F}&=F\\
\bar{G}&=G
\end{aligned} \tag{41.3}$$

である．ところが，今の目標は $\bar{B}$ と $\bar{A}$ あるいは $\bar{B}$ と $\bar{C}$ を零に等しいと置いて，ξ と η を定めることである（こうできるためには B^2-4AC が零でなければならないことがすぐわかる）．ここでは $\bar{A}$ と $\bar{B}$ を零に等しいと置いて，その結果得られる式を解こう．まず，$\bar{A}=0$ と置いて ξ_x/ξ_y について解くと

$$\frac{\xi_x}{\xi_y}=-\frac{B}{2A}$$

となる．したがって，この式を満たす座標 $\xi=\xi(x,y)$ を見いだすことができる．それには

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\xi_x}{\xi_y}=\frac{B}{2A}$$

と置いてこの式の陰関数を使った解

$$\xi(x,y)=c$$

を求めればよい．たとえば，$dy/dx=B/2A=3$ のときには，$y-3x=c$；したがって $\xi(x,y)=y-3x$ は $\xi_x/\xi_y=-3$ を満たす（そして，$\bar{A}=0$ となる）．

$\bar{A}=0$ とするような一つの座標系 $\xi=\xi(x,y)$ が見いだされたので，これで半分すんだことになる．問題の残りの半分は，$\bar{B}=0$ とするような $\eta(x,y)$ を見いだすことである．

ここで大変うまい話がある．$B^2-4AC=0$ であるので，$\bar{A}=0$ になるように ξ を選ぶと，係数 $\bar{B}$ も自動的に零になることがわかる．今，実際にこれを証明しよう．係数 $\bar{B}$ は

$$\bar{B}=2A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+2C\xi_y\eta_y$$

で与えられるが，$B^2-4AC=0$ であるから

$$\bar{B}=2(\sqrt{A}\xi_x+\sqrt{C}\xi_y)(\sqrt{A}\eta_x+\sqrt{C}\eta_y)$$

と書ける．

$$\xi_x/\xi_y=-B/(2A)=-2\sqrt{AC}/(2A)=-\sqrt{C/A}$$

であるから

$$\bar{B}=2\sqrt{A}[\sqrt{A}\eta_x+\sqrt{C}\eta_y]$$

である．$\bar{A}$ が零であるから $\bar{B}$ ももちろん零である．

したがって，ξ を上のように選べば $\bar{A}$ も $\bar{B}$ も両方とも零になる．そして，η は任意に選ぶことができる（ξ 座標に平行でない限り）．そこで，$\eta=y$ のような簡単なものを選んでよい．

あとは，新しい標準方程式を求めることだけである，それには，ξ と η を式 (41.3) に代入し係数 $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ を求めればよい．これで放物型の場合を終わる．次の話題に移る前に簡単な例を示そう．

放物型の方程式 $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0$ の標準形への変換

簡単な方程式

$$u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0$$

から始めよう．ここでは，$A=1$, $B=2$, $C=1$, $D=E=F=G=0$ である．したがって，すべての x と y に対して $B^2-4AC=0$ である．新しい座標系 ξ と η および標準形の方程式を求めるため次のような手順を踏む：

ステップ 1　特性方程式を書く（1個だけでよい）

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\xi_x}{\xi_y}=\frac{B}{2A}=1$$

y について解く（積分する）と

$$y=x+c$$

したがって，$\xi=y-x$ は特性方程式を満たし，$\xi=y-x$ とすれば $\bar{A}=0$ となる．

η 座標は ξ 座標に平行でないかぎり任意に選べる．したがって

$$\eta=y$$

と選ぶ．新しい座標系

$$\xi=y-x \qquad (41.4)$$
$$\eta=y$$

を図 41.1 に示す．

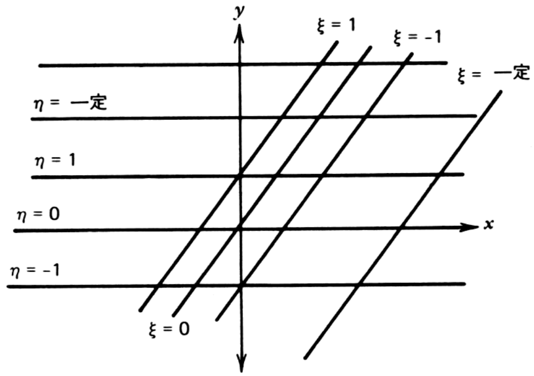


図 41.1　新しい座標系 $\xi=y-x,\ \eta=y$

ステップ 2　最後のステップは新しい標準形の方程式を求めることである．ξ と η を新しい係数 $\bar{A},\ \bar{B},\ \bar{C},\ \bar{D},\ \bar{E},\ \bar{F},\ \bar{G}$ に代入すると

$$
(41.5)\quad
\begin{aligned}
&\bar{A}=0 \quad \text{（こうなるはずである；これを零に等しいと置いて}\xi\text{を定めたのであるから）}\\
&\bar{B}=0 \quad \text{（これが零になることはすでに示した）}\\
&\bar{C}=A\eta_x{}^2+B\eta_x\eta_y+C\eta_y{}^2=1\\
&\bar{D}=A\xi_{xx}+B\xi_{xy}+C\xi_{yy}+D\xi_x+E\xi_y=0\\
&\bar{E}=A\eta_{xx}+B\eta_{xy}+C\eta_{yy}+D\eta_x+E\eta_y=0\\
&\bar{F}=F=0\\
&\bar{G}=G=0
\end{aligned}
$$

となる．したがって，われわれの新しい方程式

$$\bar{A}u_{\xi\xi}+\bar{B}u_{\xi\eta}+\bar{C}u_{\eta\eta}+\bar{D}u_{\xi}+\bar{E}u_{\eta}+\bar{F}u=\bar{G}$$

は，単に，

$$u_{\eta\eta}=0$$

となる．

これで例題は終わる．さらに先に進む前にこの標準形をちょっと眺めてみよう．この方程式は非常に簡単なので**一般解**（すべての解）を求めることができる．$u_{\eta\eta}=0$ から出発して，η に関して一度積分すると

$$u_{\eta}=f(\xi)$$

となる．ここで $f(\xi)$ は ξ の任意の関数である．もう一度積分すると一般解

$$u(\xi, \eta)=\eta f(\xi)+g(\xi)$$

が得られる．ここで $g(\xi)$ もまた ξ の任意の関数である．（この形の任意の関数が $u_{\eta\eta}=0$ の解であることを証明するのは容易である．）

さて最後のステップである．上の一般解の各項に元の座標 x と y を代入すると

$$u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0$$

の一般解が得られる．すなわち

$$u(x, y)=yf(y-x)+g(y-x)$$

である．たとえば，でたらめに $f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$ と選べば，方程式の無限にたくさんある解の中の一つ

$$u(x, y)=y\sin(y-x)+(y-x)^2$$

が得られる（もちろん，実際にどの解が元の物理の問題の数式モデルになっているかは初期条件と境界条件に依存して決まることである）．

楕円型の方程式の標準形への変形

ふたたび，一般的な方程式

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$$

から始めよう．ただし，今度は $B^2-4AC<0$ である．われわれの目標は，独立変数の変換によりこの式を

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

という新しい形に変換することである．前の二つの場合にやったのと同じような手順を踏んで，変換した式

$$\bar{A}u_{\xi\xi}+\bar{B}u_{\xi\eta}+\bar{C}u_{\eta\eta}+\bar{D}u_\xi+\bar{E}u_\eta+\bar{F}u=\bar{G}$$

において $\bar{A}=\bar{C}$，$\bar{B}=0$ と置いた式を解いて ξ と η を定めたくなる．しかし，不幸にして，これらの式 $(\bar{A}-\bar{C}=0,\ \bar{B}=0)$ は，前の式とは違って，ξ と η について解くことができない．そのため，少し違ったやり方をする．

変換 $\xi=\xi(x, y)$，$\eta=\eta(x, y)$ を二つの変換の合成変換として求める．まず，その第一の変換から始めよう．

変換 1

まず，方程式が

$$u_{\xi\eta}=\psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

という形になるような新しい座標 ξ と η への変換をする．こうすることは可能であるが，複素座標の助けを借りなければならない．これらの複素座標 ξ と η を求めるには，双曲型の場合にやったように，特性方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$
（$B^2-4AC<0$ であることに注意）

を解いて

$$\xi(x, y)=\text{一定}$$
$$\eta(x, y)=\text{一定}$$

を求めさえすればよい．たとえば，特性方程式

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{-4x^2}=-2ix$$
$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{-4x^2}=2ix$$

からは複素共役座標

$$\xi=y+ix^2$$
$$\eta=y-ix^2$$

が得られる．

変換 2

(ξ, η) から (α, β) への第2の変換は

$$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2}$$
$$\beta=\frac{\xi-\eta}{2i}$$

による．この第2の変換の結果，第1の式

$$u_{\xi\eta}=\psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

は最終の形

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=\phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

に変わる．ここで，ϕ と ψ は右辺の総称である．

これら二つの変換（互いに助け合っている）から実際に上記の結果が計算で

出ることを示す代りに，これらの原理を簡単な例題に適用しよう．

方程式 $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$ の標準形への変換

方程式

$$y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$$

の変換を考えよう．ここで，$A=y^2$，$B=0$，$C=x^2$，$D=E=F=G=0$．判別式 B^2-4AC は $-4x^2y^2$ に等しい．第1象限 $x>0$，$y>0$ でこの式を標準形に変換しよう．

ステップ 1 （第1の変換）

二つの特性方程式をまず書く．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=-\frac{\sqrt{-4x^2y^2}}{2y^2}=-i\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\frac{\sqrt{-4x^2y^2}}{2y^2}=i\frac{x}{y}$$

これらの式を変数分離によって解くと陰関数による解

$$y^2+ix^2=\text{一定}$$

$$y^2-ix^2=\text{一定}$$

が得られる．すなわち

$$\xi(x,y)=y^2+ix^2$$

$$\eta(x,y)=y^2-ix^2$$

（どちらの関数を ξ と呼びどちらを η と呼んでもかまわない．二つを交換したければしてもよい．）この変換により元の方程式は

$$u_{\xi\eta}=\psi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

という形になる．この式が求めるものではない（これは複素双曲型方程式である）から，第2の変換に進もう．

ステップ 2 （第2の変換）

第2の変換をすると，

$$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2}=y^2 \quad (\xi \text{ と } \eta \text{ の実部})$$

$$\beta=\frac{\xi-\eta}{2i}=x^2 \quad (\xi \text{ と } \eta \text{ の虚部})$$

が得られる．記号を整理する意味からは，変数 (α,β) を (ξ,η) と呼び直して合成変換を単に

$$\xi(x,y)=y^2,\qquad \eta(x,y)=x^2$$

としてしまった方がよい．

ステップ 3 （新しい方程式を求める）

方程式

$$\bar{A}u_{\xi\xi}+\bar{B}u_{\xi\eta}+\bar{C}u_{\eta\eta}+\bar{D}u_{\xi}+\bar{E}u_{\eta}+\bar{F}u=\bar{G}$$

の係数 $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ を，$\xi=y^2$, $\eta=x^2$ として，式 (41.5) から計算すると新しい標準形が求まる．こうして得られるのが楕円型の標準形

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\frac{-\xi u_{\eta}-\eta u_{\xi}}{2\xi\eta}$$

である．

注意

1. 3変数以上の2階の線形方程式も，行列計算をしなければならないが，やはり分類することができる．たとえば，3変数の2階の方程式

$$u_t=u_{xx}+u_{yy}$$

は放物型と分類されるし，方程式

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}$$

は双曲型である．

2. 偏微分方程式の分類にわれわれが興味をもつ理由の一つは，三つの基本型が異なる種類の物理現象を表すという事実があるからである．そこで，物理の問題を数学的にこれら三つの型に分類しようとするわけである．

練習問題

1. 次の放物型の方程式と楕円型の方程式のうちどれとどれがすでに標準形になっているか：

　(a)　$u_t=u_{xx}-hu$

　(b)　$u_{xy}+u_{xx}+3u=\sin x$

　(c)　$u_{xx}+2u_{yy}=0$

　(d)　$u_{xx}=\sin x$

2. 放物型の方程式 $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+u=2$ を標準形に変換せよ．

3. 楕円型の方程式 $u_{xx}+2u_{yy}+x^2u_x=e^{-x^2/2}$ を標準形に変換せよ.

参考書

1. M. M. Smirnov, *Second-Order Partial Differential Equations*, Noordhoff, 1966. 良く書かれた小冊子である. 2変数の2階の方程式の分類の他に, n 変数の2階の方程式の分類もしている.
2. R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 2, Wiley/Interscience, 1962. 今世紀の最も傑出した数学者の二人が書いた偏微分方程式論に関する最も有名な本の一つである. 本書よりは程度が高いが, 十分時間をかけて勉強する気のある人にとっては豊富な情報を含んでいる.

第42課　モンテ・カルロ法(入門)

目的：モンテ・カルロ法の基本的な精神を説明し，いろいろな問題を解くときにモンテ・カルロ法をどう使えばよいかを示すこと．ここでの考え方の基本は，偶然のゲームを（一般には計算機上で）して，そのゲームの結果が現実の問題の解の近似になるようにしようということである．一つの簡単な例として，単位正方形 $\{(x, y) : 0<x<1, 0<y<1\}$ に矢を投げて，積分

$$I=\int_0^1 x^2 dx$$

の値を求めるものがある．100 回くらい投げて，曲線 $y=x^2$ の下に矢が落ちた回数の割合がこの積分の近似値を与える．（矢投げのような）ランダムなゲームを計算機でおこなうときには，乱数列を発生させるという手順が常に含まれている．そこで，乱数の発生させ方について述べる．

モンテ・カルロ法という名の方法で，多くの型の問題を解くのに使える面白い方法がある．ここではその方法を手短に概観し，次の課で偏微分方程式への応用について説明する．

まず第一に，モンテ・カルロ法とは，非確率的な型の問題（結果が偶然によらない問題）を確率的な型の方法（結果が偶然による方法）で解く手順のことである．この方法の一般的な精神を図 42.1 に説明してある．

確率的なゲーム	**決定論的な問題**
$\hat{p}$：ゲームの結果	p：問題の答
（貨幣投げで表が出る割合，矢投げ，等々）	（定積分の計算，偏微分方程式の解，等々）

$$\text{結果}=\hat{p} \xrightarrow{\text{近似}} \text{答}=p$$

図 42.1　モンテ・カルロ法の精神

定積分の計算

この方法を説明するために，積分

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

の値が求めたいと仮定しよう（非確率的な問題）．モンテ・カルロ法を使うには，ゲームの結果が積分の値になる（あるいはそれの近似となる）ような偶然のゲームを考案すればよい．もちろん，考案できるゲームはたくさんある．実際にどんなゲームを使うかは近似の精度，ゲームの簡便さなどによる．上のような積分の値を計算するためのゲームとして，矩形 $R=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant \max f(x)\}$ に矢を投げるゲームがあることは明らかであろう（図42.2）.

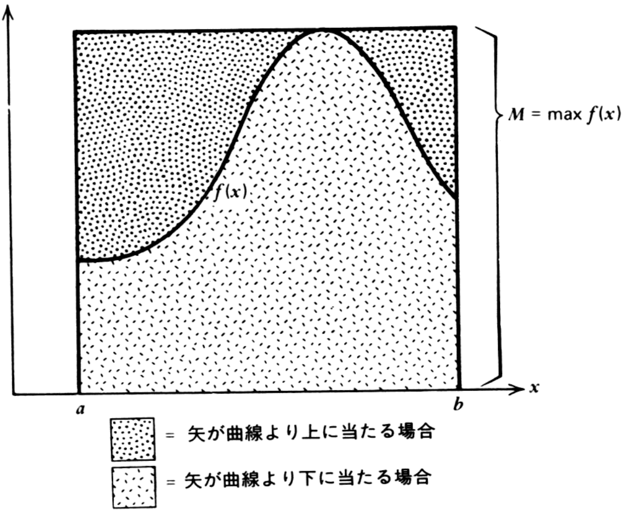


図 42.2　モンテ・カルロ法による定積分の計算

グラフを囲む矩形Rに矢をランダムに100回くらい投げると，矢が曲線より下に当たる回数の割合を R の面積に掛けたものが積分の近似値を与えることはほとんど自明であろう．したがって，ゲームの結果

$$\hat{I}=[\text{矢が } y=f(x) \text{ のグラフより下に当たった割合}]\times(R\text{ の面積})$$

を使って積分 I の真の値の推定ができる．

計算機で実際に計算をするには，何らかの方法でランダムな点列を発生させ（これについてはすぐ述べる），計算機に矢投げのゲームをさせたことにする．とりあえずランダムな点列が利用できると仮定しよう．図 42.3 の流れ図は計算機による問題の扱い方を説明している．

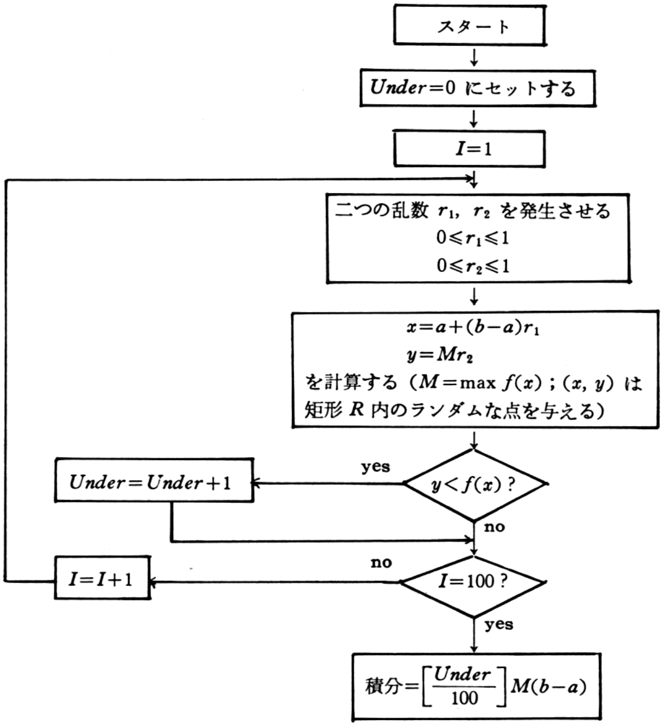


図 42.3　$\int_a^b f(x)dx$ の値をモンテ・カルロ法（100 回投げ）により求める流れ図

乱数

次の課でモンテ・カルロ法を偏微分方程式の解に適用するが，その前に，大切な乱数の話題に触れよう．上で考えた積分では，矩形 R の中に落ちるランダムな点列 $P_i=(x_i, y_i)$ を発生させる必要があった．すなわち，x 座標 x_i が区間 $[a, b]$ の中の乱数で，y 座標 y_i が区間 $[0, M]$ の中の乱数でなければ

ならない．特定の区間の中の乱数を作るには，[0,1] の中に（一様に分布する）基本的な乱数列 r_i をまず作ればよい．[a,b] の中の乱数 x_i が欲しければ，

$$x_i=a+(b-a)r_i$$

を計算すればよいことは明らかである．したがって，すべては区間 [0,1] の中に一様に分布する乱数列 $\{r_i : i=1,2,\cdots\}$ をどうやって発生させるかという問題に帰着される．現在最も良く使われている方法は剰余法（合同法ともいう）である．この方法は，ランダムな整数列（2120, 1401, 177, 3013, … のような）を発生して，次にそれらの数の左端に小数点を置くことによって0と1の間の数（0.2120, 0.1401, 0.0177, 0.3013, … のような）を作る．

そこで，ランダムな整数列（ここでは 0 と P の間の整数とする）を発生させるには剰余算法を使う．

乱数を発生させるための剰余算法

1. まず最初の乱数（整数）を0と P（P はあらかじめ定めてある）の間に勝手に選ぶ．
2. この乱数（整数）にある一定の整数 M（M はあらかじめ定めてある）を掛ける．
3. その積に別の一定の整数 K（K もあらかじめ定めてある）を足す．
4. そうしてできた数を P で割り，その剰余を新しい乱数（整数）として採用する．ステップ2に戻り，ステップ2～4を繰り返す．十分な数の乱数（整数）が得られるまで続ける．

この剰余算法は式で書くと

$$r_{i+1}\equiv(Mr_i+K) \bmod P \quad (i=0,1,2,\cdots)$$

となる．つまり，乱数（整数）r_i が与えられたとき次の乱数（整数）を計算するには，M を掛け，K を足し，P で割り，剰余を取る．たとえば，

$$P=100$$
$$M=37$$
$$K=16$$
$$r_0=15$$

と定めれば，次のような乱数列が発生されることになる：

$$Mr_0+K=\ 571 \longrightarrow r_1=71$$

$$Mr_1+K=2643 \longrightarrow r_2=43$$

$$Mr_2+K=1607 \longrightarrow r_3=\ 7$$

$P=100$ であるから，すべての整数は 0 と 99 の間にあることに注意せよ．これらの整数の前に小数点を置くことによって，0 と 1 の間の乱数列が得られる：

$r_0=0.15$
$r_1=0.71$
$r_2=0.43$
$r_3=0.07$ （これらの数もまた r_i と記している）

注意

1. 上のような乱数発生機構では，$P=100$ で割った剰余を取っているから，剰余は整数 $0, 1, 2, \cdots, 99$ のどれかである．したがって，この過程はいずれは繰り返しを始める．実際，上の例の乱数列は

   $\underline{15}$, 71, 43, 7, 75, 91, 83, 87, 35, 11, 23, 67, 95, 31,
   63, 47, 55, 51, 3, 27, $\underline{15}$, 71, … （20 個の数が循環する）

   となり，したがって上記の方法は良くない．繰り返しを始める前に剰余類 $\{0, 1, 2, \cdots, 99\}$ の全体がランダムに発生されるというのが理想的な状況である．数学的には，数 M, K, P をある規則に従って選べば，最初の乱数（整数）r_0 をどう選ぼうと，剰余類全体が作られるということが証明できる．したがって，そのような規則に従って P を非常に大きく（たとえば 2^{40} くらいに）選ぶと，実際上繰り返しを起こさない過程が得られることが保証される．

2. $$I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{-(x^2+y^2+z^2+w^2)}\,dxdydzdw$$

   のような高次元の積分を計算するとき以外は，積分の計算法としてはモンテ・カルロ法より他の数値計算法（Simpson の法則のような）の方が一般には良い．

3. 一様分布 $f(x)=1$ $(0<x<1)$ 以外のいろいろな統計的分布に従う無作為

標本（ランダム・サンプル）を作ることも可能である（通常の乱数発生機構）．２項分布，Γ 分布，正規分布，その他いろいろな分布に従う無作為標本を発生させる計算機プログラムが利用可能である．これらの分布はどこにでも転がっているものであって，現実の世界のモデルを作らなければならなくなったときに大切なものである．

練習問題

1. 積分

$$I=\int_0^1 e^{\sin x}dx$$

の値を求める計算機プログラムを書け．その答えはどのくらいの精度か．収束する傾向にあるかどうかを見るために，近似値と試行回数との関係をグラフに描け．

2. アルゴリズム

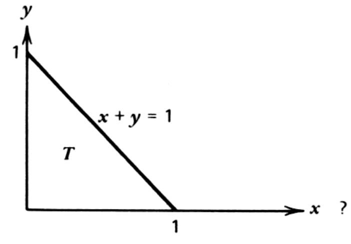
$$r_{i+1}\equiv(3r_i+4)\bmod 7, \qquad r_0=0$$

により乱数列を作れ．

3. $$I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$$

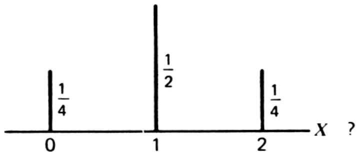
の値を求める計算機プログラム（と流れ図）を書け．精度はどうか．

4. 下図の三角形 T の内部にランダムな点列を発生させるにはどうすればよいか．



5. 次頁の図に与えられている統計分布に従う無作為標本はどうやって作ればよいか．すなわち，0 と 2 が確率 0.25，1 が確率 0.5 で現れるような整数列 $\{0, 1, 2\}$ はどうやって作ればよいか．

6. Buffon（ビュッフォン）の針の問題というのは，針（長さ 1）をランダムに米国旗（赤縞の幅も白縞の幅もともに 1）の上に投げたとき針が縞の境目の線と交わる確率がいくらかというものである．その確率は $2/\pi$ であるということが知られている．π の値を求めるゲーム（および計算機プログラム）を設計してみよ．



参考書

J. M. Hammersley, D. C. Handscomb, ***Monte Carlo Methods***, Methuen and Company (London), 1964. この簡潔な本には，モンテ・カルロ法の一般原理の概要が述べられている．微分方程式，固有値問題，積分方程式の解法や，また，統計力学，中性子の拡散，放射線遮蔽の問題なども含まれている．参考書もたくさん挙げてある．

第43課　偏微分方程式のモンテ・カルロ解

目的：　微分方程式の解を近似する結果を生むような無作為ゲーム（モンテ・カルロ法）の設計法を示すこと．正方形内部の Dirichlet 問題の差分近似解が結果として得られるような特殊なゲーム（酔歩のゲーム）の話をする．このゲームを拡張するともっと他の問題の解も含められるようになる．

前の課では，期待されるゲームの結果が偏微分方程式の問題の解あるいは近似解になるような偶然のゲームの設計法についてのヒントを与えた．この課では Dirichlet 問題

偏微分方程式　$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad (0<x<1,\ 0<y<1)$

境界条件　$u(x,y)=g(x,y)=\begin{cases}1 & \text{（正方形の上端の辺上で）}\\ 0 & \text{（正方形の下端および両横の辺上で）}\end{cases}$

の解を近似するゲームの設計し方を示そう．（この特殊な問題のモンテ・カルロ法による解法を示した後，もっと一般的な問題についても論じることにしよう．）

この問題のモンテ・カルロ法を説明するために，酔歩のゲームと呼ばれるゲームを紹介しよう．そのゲームをするには，格子を描いた盤が必要である（図43.1）．

ゲームの規則は次の通りである．

酔歩のゲームのやり方

ステップ 1　酔っ払いが任意の点（ここでは点 A としておく）から出発する．

ステップ 2　ゲームの各段階で，彼は 4 個の隣接格子点のどれか一つに移動

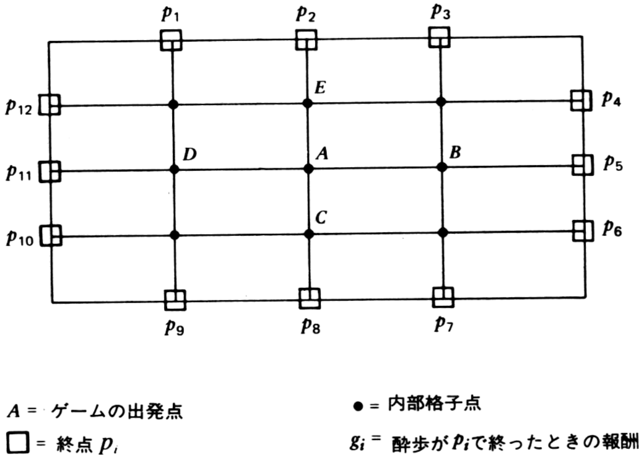


図 43.1　酔歩のゲーム盤

する．(今の場合，A の隣接点は B, C, D, E であり，それぞれに行く確率は 0.25 である．)

ステップ 3　隣の点に着いたら，さらに，点から点へとさまよいながらたまたま一つの境界上の点 p_i に行き当たるまで同様な過程を続ける．境界上の点 p_i に行き着いたら点 p_i を記録する．これで 1 回の酔歩は終わりである．

ステップ 4　ステップ 1～3 を繰り返して．酔歩を多数回行う．酔っ払いが

表 43.1　p_i で終わる酔歩の確率 (および報酬)

境界点 p_i	$P_A(p_i)$＝酔っ払いが p_i に行き着く回数の割合	$g_i=p_i$ に行き着いたときの報酬
1	0.04	1
2	0.15	1
3	0.03	1
4	0.06	0
5	0.17	0
6	0.05	0
7	0.06	0
8	0.15	0
9	0.03	0
10	0.06	0
11	0.16	0
12	0.04	0

境界上の点 p_i に行き着いた酔歩の回数の割合を計算する．表 43.1 は 100 回の酔歩の後の結果の典型的な例を示す．

ステップ 5　境界上の点 p_i で酔歩が終わったとき酔っ払いは報酬 g_i を受け取るものとする（g_i は点 p_i における境界条件の値である）．ゲームの得点は全酔歩の平均報酬 $R(A)$ で計算するものとする．平均報酬は

$$R(A)=g_1P_A(p_1)+g_2P_A(p_2)+\cdots+g_{12}P_A(p_{12})$$

である．$R(A)$ を決定したらゲームは終わる．表 43.1 にあるような g_i と $P_A(p_i)$ の値をもつゲームでは，

$$\begin{aligned}R(A)&=1(0.04)+1(0.15)+1(0.03)+0(0.06)+\cdots+0(0.04)\\&=0.22\end{aligned}$$

である．

このゲームをする理由を次に述べよう．

酔歩のゲームをする理由

われわれがいま得た平均報酬が Dirichlet 問題の解の点 A における近似値であることがわかる．このことは次の二つの事実に基づいている．

1. 酔っ払いが正方形の境界上の点 A から出発したとすると，酔歩は即座にその点で終わり，酔っ払いは報酬 g_i を受け取る．したがって，境界上の点から出発するときの平均報酬は g_i である．
2. 酔っ払いが内部の点を出発したとすると，平均報酬 $R(A)$ は，明らかに，その点の 4 個の隣接点の平均報酬の平均である：

$$R(A)=\frac{1}{4}[R(B)+R(C)+R(D)+R(E)]$$

そこで，改めて，なぜ酔っ払いの平均報酬 $R(A)$ が Dirichlet 問題の解の A における近似値を与えるのかを調べてみよう．$R(A)$ が

$$R(A)=\frac{1}{4}[R(B)+R(C)+R(D)+R(E)]\quad(A\text{ が内部の点のとき})$$

$$R(A)=g_i\quad(A\text{ が境界上の点のとき})$$

という二つの式を満たすことはすでに見た．g_i を境界上の点 p_i における境界関数 $g(x,y)$ の値とすれば，この二つの式は Dirichlet 問題を差分法で解いたときに到達した二つの方程式とぴったり一致する．すなわち，$R(A)$ は差分方程式

$$u_{i,j}=\frac{1}{4}(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1})\quad ((i,j)\text{ が内部の点のとき})$$

$$u_{i,j}=g_{i,j}\qquad (g_{i,j}\text{ は境界上の点 }(i,j)\text{ における解の値})$$

の $u_{i,j}$ に対応する．したがって，$R(A)$ は偏微分方程式の真の解の A における値の近似値となる．酔歩のゲームは次の三つのステップに要約することができる．

モンテ・カルロ法による Laplace 方程式の解

以下の規則は正方形の内部の一点における解を与える．

ステップ 1　ある特定の点 A を出発し，境界上の点にぶつかったら終わるという酔歩をいくつか作る．

ステップ 2　それらの酔歩を作り終わったら，各点 p_i ごとに p_i で終わった回数の割合を計算する．これらの割合を $P_A(p_i)$ と記す．

ステップ 3　公式

$$u(A)=g_1P_A(p_1)+g_2P_A(p_2)+\cdots+g_NP_A(p_N)$$

により近似解 $u(A)$ を計算する．ここで，g_i は p_i における関数の値，N は境界上の点の数である．

酔歩のゲームは，次の例のように，少々修正してもっと複雑な問題も解けるようにすることができる．

変数係数の Dirichlet 問題の解

次のような正方形内部の楕円型境界値問題を考えよう：

偏微分方程式　$u_{xx}+(\sin x)u_{yy}=0\quad (0<x<\pi,\ 0<y<\pi)$

境界条件　$u(x,y)=g(x,y)$　(正方形の境界上で)

これを解くため，u_{xx}，u_{yy}，$\sin x$ を

$$\left.\begin{aligned}u_{xx}&=u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}\\u_{yy}&=u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}\end{aligned}\right\}\ (\text{中心差分近似})$$

$$\sin x=\sin x_j$$

で置き変え，偏微分方程式にこれらを代入する．関係する格子点を図 43.2 に示す．

これらの代入を行ってから，$u_{i,j}$ について解けば

$$u_{i,j}=\frac{u_{i,j+1}+u_{i,j-1}+\sin x_j(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})}{2(1+\sin x_j)}$$

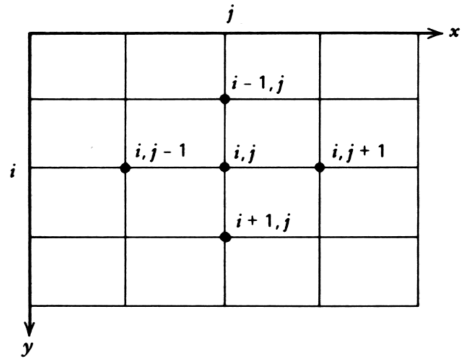


図 43.2　酔歩の格子点

が得られる．

この最後の式を注意深く眺めてみよう．$u_{i+1,j}$, $u_{i-1,j}$, $u_{i,j+1}$, $u_{i,j-1}$ の係数は正で和をとると1になる．いいかえれば，解 $u_{i,j}$ は4個の隣接点における解の加重平均である．そこで，酔っ払いがそれぞれの隣接点に確率 0.25 でよろめいて行くのではなくて，上式の各項の係数に等しい確率で隣接点によろめいて進むようにゲームを修正する．すなわち，酔っ払いが点 (i, j) にいるとき，彼は

$$\text{確率}\quad \frac{1}{2(1+\sin x_j)}\quad \text{で点}\ (i,\ j+1)\ \text{へ}$$

$$\text{確率}\quad \frac{1}{2(1+\sin x_j)}\quad \text{で点}\ (i,\ j-1)\ \text{へ}$$

$$\text{確率}\quad \frac{\sin x_j}{2(1+\sin x_j)}\quad \text{で点}\ (i+1,\ j)\ \text{へ}$$

$$\text{確率}\quad \frac{\sin x_j}{2(1+\sin x_j)}\quad \text{で点}\ (i-1,\ j)\ \text{へ}$$

進む．このわずかな修正以外は，前とまったく同じゲームである．その他の問題に対する修正にはもう少し微妙な点があるかもしれないが，考え方は同じである．読者は各自のゲームを工夫して他の問題を解いてみるとよい．放物型の場合は練習問題の中で考えよう．

注意

1. 割合 $P_A(p_i)$（酔っ払いが p_i で酔歩を終わる回数の割合）さえ計算してあれば，$P_A(p_i)$ を公式

$$u(A)=g_1P_A(p_1)+g_2P_A(p_2)+\cdots+g_NP_A(p_N)$$

に代入することによって，他の任意の境界条件 g_i に対する解 $u(A)$ を求めることができる．すなわち，新しい酔歩を作る必要はないのである．

2. 偏微分方程式の解のただ一点における値だけを研究者が知りたいという場合も多い．境界がかなり複雑で，偏微分方程式が3次元とか4次元であるときには，モンテ・カルロ法が助けになるかもしれない．実際，モンテ・カルロ法は，元来は，解析的に解くことのできない難しい中性子拡散の問題を研究するために開発されたものである．

練習問題

1. 問題

偏微分方程式　$u_{xx}+u_{yy}=0$　$(0<x<1,\ 0<y<1)$

境界条件　$u(x,y)=g(x,y)$　（境界上で）

の内部の点における解を求めるための酔歩のゲームの流れ図を書け．

2. 練習問題1の流れ図を実行する計算機プログラムを書け．

3. 偏微分方程式　$u_{xx}+x^2u_{yy}=0$　$(0<x<1,\ 0<y<1)$

境界条件　$u(x,y)=g(x,y)$　（境界上で）

を解くには酔歩のゲームをどう修正すべきか．この酔歩はどんな性質をもっているか．

4. 偏微分方程式　$u_{xx}+u_{yy}=0$　$(0<x<1,\ 0<y<1)$

境界条件

$$\begin{cases} u(x,1)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u(0,y)=1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y)=0 \end{cases} \qquad (0<x<1,\ 0<y<1)$$

を解く修正酔歩のゲームを考案できるか．

5. 次の放物型の初期値・境界値問題を解くモンテ・カルロ・ゲームを導け．

偏微分方程式　$u_t=\alpha^2u_{xx}-\beta u_x-\gamma u$　$(0<x<1,\ 0<t<\infty)$

境界条件

$$\begin{cases} u(0,t)=f(t) \\ u(1,t)=g(t) \end{cases} \qquad (0<t<\infty)$$

初期条件　　$u(x,0)=\phi(x)$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$

ヒント　偏微分方程式を Crank–Nicolson の差分近似で置き変えよ．$u_{i+1,j}$ の値をその5個の隣接点 $u_{i+1,j-1}$, $u_{i+1,j+1}$, $u_{i,j-1}$, $u_{i,j}$, $u_{i,j+1}$ の値を使って表す式を作り，それをもとにして考えよ．

参考書

G. W. Brown, *Monte Carlo Methods*, (E. F. Beckenbach (編), *Modern Mathematics for the Engineer*) McGraw–Hill, 1956. モンテ・カルロ法の基本的な考え方を説明した短い章がある．

第 44 課　変分法 (Euler-Lagrange 方程式)

目的：　汎関数（関数の関数）という概念を導入し，物理学において汎関数が自然に登場してくるということを説明する．積分

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

で表される汎関数はごく普通に現れる型のものである．ここで，汎関数 J は y（関数）の関数と考えられる．そして，被積分関数 $F(x,y,y')$ は既知であると仮定する．汎関数

$$J[y]=\int_0^1 [y^2(x)+y'^2(x)]dx$$

は一例である．また，$J[y]$ を最小にする関数 $\bar{y}(x)$ の求め方も示す．それは，$\bar{y}$ が最小関数であるとき常に満たさなければならない方程式 (Euler–Lagrange（オイラー・ラグランジュ）方程式) を立てることにより求めることができる．この方程式は，関数 $f(x)$ の最小点 x においては

$$\frac{df(x)}{dx}=0$$

であるという微積分学の必要条件に類似のものである．

微分方程式に密接に関係していながら不幸にしてそのことを学ばない学生が多い題目の一つに変分法がある．この課と次の課において，この変分法という主題を紹介し，変分原理による偏微分方程式の解法を示す．

変分法は，はじめ，微積分学と同じ頃に研究されたもので，関数の関数（**汎関数**と呼ぶ）を最大あるいは最小にするという問題を扱う．変分法の最初の問題の一つが，1696 年に Johann Bernoulli（ヨハン・ベルヌーリ）が提出した

最速降下線の問題であった．これは，図 44.1 のように，与えられた2点間を結ぶ摩擦のない道を粒子がすべり降りて行くときの所要時間を最小にするような道 $y(x)$ を求めようというものである．

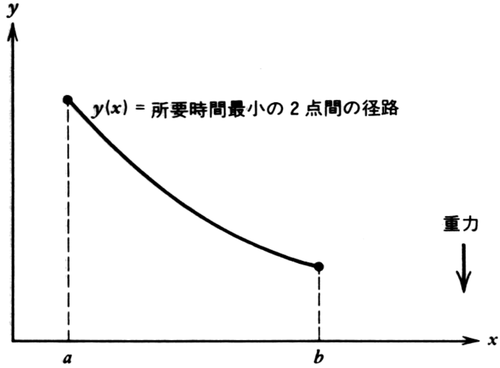


図 44.1　最速降下線問題（変分法の最初の問題）

Bernoulli は所要時間 T が

$$T=\int_0^T dt=\int_0^L \frac{dt}{ds}ds=\int_0^L \frac{ds}{v}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^L \frac{ds}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx$$

と書き表せることを示した．したがって，所要時間 $T(y)$ は関数 y の関数と考えることができる．多くの汎関数がこの型をしているので，**一般形**

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx \tag{44.1}$$

を学べば十分である．

このような動機を考えながら，この課の目標をもう一度述べておこう．すなわち，(44.1) の形の汎関数を最小にする（あるいは最大にする）ような関数 $y(x)$ を求めることが目標である．この課題に対して使う技術は，微積分学において関数 $f(x)$ の最小点を求めるときに使う方法とかなり共通したものである．微積分学では，$f'(x)=0$ と置いて x について解くことにより関数の極値を求めた．変分法では，被積分関数の引数に入る未知量が数ではなく関数そのものであるために，事柄がずっと扱いにくくなっている．しかし，一般精神は同じである．関数 $y(x)$ に関する（いわば）汎関数微分（といったもの）を取り，それを零に等しいと置く．このようにしてできる方程式は，微積分学にお

ける方程式

$$\frac{df(x)}{dx}=0$$

と類似のものではあるが，単なる方程式ではなく常微分方程式 (**Euler-Lagrange**) **方程式**と呼ばれる) である．この課ではこれから先，この方程式の立て方を示し，具体的な例題に対してそれを適用してみよう．

一般的な汎関数 $J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$ の最小化の問題

境界条件

$$y(a)=A$$
$$y(b)=B$$

を満たす滑らかな関数の族の中から，汎関数

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

を最小にする関数 (最小関数) $y(x)$ を見いだす問題を考えよう．図 44.2 を見よ．

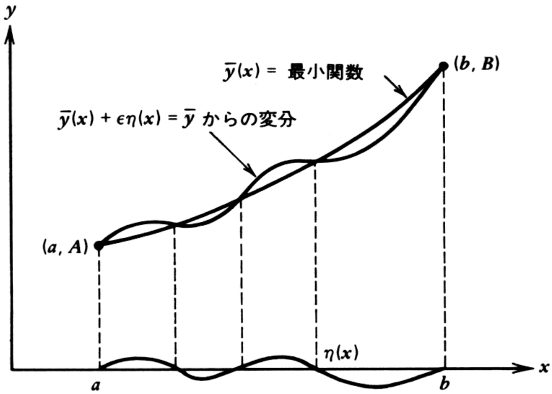


図 44.2　関数の変分

最小関数 ($\bar{y}$ と記そう) を定めるために，$\bar{y}(x)$ からの微小な変分，すなわち

$$\bar{y}(x)+\varepsilon\eta(x)$$

を導入する．ここで，ε は微小な数，$\eta(x)$ は境界条件 $\eta(a)=\eta(b)=0$ を満た

す滑らかな曲線である．図 44.2 にこれらを示す．明らかに，$\bar{y}(x)$ の近傍にある関数 $\bar{y}+\varepsilon\eta$ について積分 J を計算したものは $\bar{y}$ についての汎関数 J より大きい．つまり，すべての ε に対して

$$J[\bar{y}]\leqslant J[\bar{y}+\varepsilon\eta]$$

であるはずである．いいかえれば，ε の関数として関数 $\phi(\varepsilon)=J[\bar{y}+\varepsilon\eta]$ のグラフを描けば，図 44.3 のようなグラフが得られるはずである．

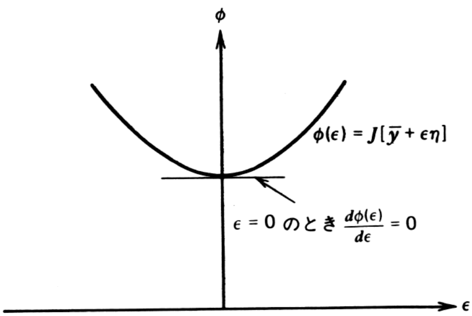


図 44.3　$\varepsilon=0$ の近傍における $J[\bar{y}+\varepsilon\eta]$ のグラフ

図 44.3 を考慮すると，$\bar{y}$ を求めるには

$$\phi(\varepsilon)=J[\bar{y}+\varepsilon\eta]$$

を ε に関して微分し，$\varepsilon=0$ を代入し，これを零に等しいと置くことになる．つまり，

$$\begin{aligned}\frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}&=\frac{d}{d\varepsilon}J[\bar{y}+\varepsilon\eta]\bigg|_{\varepsilon=0}\\&=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial\bar{y}}\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'}\eta'(x)\right]dx\end{aligned}$$

である．（読者もこの計算を自分で実行してみよ．）部分積分すれば

$$=\int_a^b\left\{\frac{\partial F}{\partial\bar{y}}-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'}\right]\right\}\eta(x)dx=0$$

となる．境界条件 $\eta(a)=\eta(b)=0$ を満たす任意の関数 $\eta(x)$ に対してこの積分が零にならなければならないから，被積分関数の $\{(\partial F/\partial\bar{y})-(d/dx)[\partial F/\partial\bar{y}']\}$ の部分が零とならなければならないことは明らかである．すなわち，

(44.2)　$$\frac{\partial F}{\partial\bar{y}}-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'}\right]=0$$　(Euler–Lagrange の方程式)

式 (44.2) は **Euler-Lagrange の方程式**と呼ばれている．この一般形を見ると複雑そうに見えるかもしれないが，特定の関数 $F(x,y,y')$ を代入すれば，この式が従属変数 $\bar{y}$ に関する2階の常微分方程式に他ならないことがただちにわかる．いいかえれば，この常微分方程式を解いて最小化関数 $\bar{y}$ を定めることができる．

これまで述べてきたことをまとめると次のようになる（記号 $\bar{y}$ の代りに単に y と記すことにする）：

★　y が $J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$ を最小にするならば，y は方程式

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\right]=0$$

を満足しなければならない．

以上の考え方を明らかにするため一例を挙げよう．

汎関数 $J[y]=\int_0^1[y^2+y'^2]dx$ を最小にする関数を求めること

いま，点 (0,0) と (1,1) を通り，

$$J[y]=\int_0^1[y^2+y'^2]dx$$

を最小にする関数 $y(x)$ を求めたい．被積分関数が y' に関係しているので微分可能な関数を対象にしていることは文脈から明らかである．$\bar{y}$ を求めるため，まず Euler-Lagrange の方程式［および境界条件 $y(0)=0$, $y(1)=1$］を書く．

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

$$y(0)=0$$

$$y(1)=1$$

$F(x,y,y')=y^2+y'^2$ であるから

$$F_y=2y,\quad F_{y'}=2y' \qquad (y \text{ と } y' \text{ に関して } F \text{ を微分する})$$

であり，したがって，Euler-Lagrange の方程式は

$$2y-\frac{d}{dx}(2y')=0$$

すなわち

$$y''-y=0$$

となる．

この簡単な微分方程式を境界条件 $y(0)=0$, $y(1)=1$ の下で解くと

$$\bar{y}(x)=0.425\,e^{x}-0.425\,e^{-x}$$

が得られる．この解を図 44.4 に示す．二つの境界点を通る他の任意の滑らかな曲線がより大きな $J[y]$ を生じるというのがここでの要求事項である．

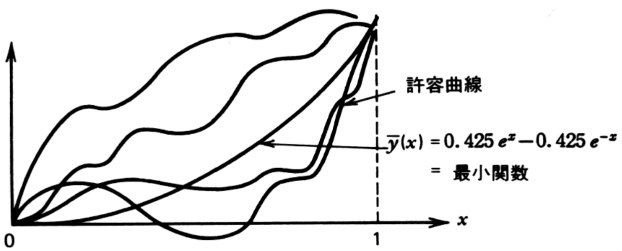


図 44.4 可能な滑らかな曲線のすべて（境界条件 $y(0)=0$, $y(1)=1$ を満足するもの）

注意

1. Euler–Lagrange の方程式は，微積分学において導関数を零に等しいと置いた方程式に似ている．微積分のときもそうであったように，この手順に従って必ずしも最小（あるいは最大）が得られるとは限らない．たとえば，関数 $f(x)=x^3$ は $x=0$ における導関数が零であるが，この点は極大でもなければ極小でもない．Euler–Lagrange の方程式についても同じことがいえる．Euler–Lagrange の方程式は最小関数が満たすべき必要条件であって，そうでない関数もまたこの方程式を満たすかもしれない．しかし，問題の物理的性質から Euler–Lagrange の方程式の解が汎関数の極小（あるいは実際に最小）を与える場合が非常に多い．また，そうなっているかどうかがわかる場合が多い．
2. 汎関数

$$J[y]=\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

の最小関数 $y(x)$ は，$y(x)$ を x 軸の周りに回転させてできる回転体の最小表面積を与える曲線である（図 44.5）．

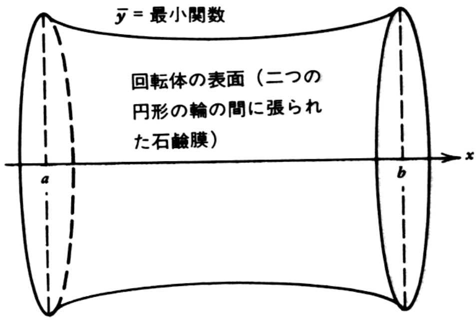


図 44.5　回転体の最小表面

境界条件 $y(a)=A$, $y(b)=B$ の下での Euler-Lagrange の方程式の解は，双曲線余弦曲線（懸垂線）

$$\bar{y}(x)=\alpha\cosh[(x-\beta)/\alpha]$$

の一部である．ここで，定数 α と β は与えられた端点を曲線が通過するように決める．双曲線余弦関数がこの Euler-Lagrange の方程式を満たすことを確かめることならできるであろうが，この Euler-Lagrange の方程式はかなり解きにくい方程式である．

3. この課で，汎関数

$$J[y]=\int_0^1[y^2+y'^2]dx$$

を最小にするのは最小関数

$$\bar{y}(x)=0.425\,e^x-0.425\,e^{-x}$$

であることを示したが，そのときの汎関数 J の値 $J[\bar{y}]=1.313$ を計算することも可能である．端点 (0,0) と (1,1) を通過する他の任意の滑らかな関数 $y(x)$ に対しては，$J[y]$ のより大きな値が得られる．

4. 物理学の基本的な原理は微分方程式よりむしろ最小原理を使って述べられることが多い．Fermat（フェルマ）の原理（光線は同じ端点をもつ道の中で所要時間が最小のものに沿って走る），Hamilton（ハミルトン）の原理（保存力場において，粒子は作用積分

$$\int_{t_1}^{t_2}[(\text{運動エネルギー})-(\text{位置エネルギー})]dt$$

を最小にするように動く）などは，自然が汎関数を最小にするように行動するということの例である．

5. 変分法の考え方を使って

$$J[u]=\int_D\int F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy$$

のような重要な重積分汎関数を最小にすることもできる．そこでは，対応する Euler-Lagrange の方程式として

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0 \quad \text{（偏微分方程式）}$$

という偏微分方程式が現れる．しかし，次の課でのわれわれの一般的な立場は少々違う．われわれの目標は，この二重積分汎関数を最小にする関数 $u(x,y)$ を（何か新しい方法で）求め，そして，偏微分方程式の解を求めようというのである．いいかえれば，汎関数を最小にすることによって偏微分方程式を解こうというのである．これは，一重積分の汎関数についてこの課でやってきたことと対照的である．すなわち，この課では Euler-Lagrange の方程式を解くことによって最小関数を求めた．微分方程式を解くために対応する汎関数 $J[u]$ の最小関数を求める方法のことを，変分法における直接的方法と呼ぶ．汎関数 $J[u]$ の最小関数を求めるために対応する Euler-Lagrange の方程式を解く方法のことを，変分法における間接的方法と呼ぶ．次の課では，有名な Ritz（リッツ）の直接的方法について論じる．

練習問題

1. $y(0)=0$, $y(1)=1$ を満足する曲線の中から

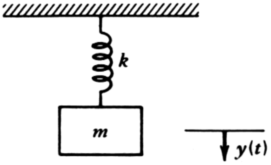
$$J[y]=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

を最小にする関数 $\bar{y}(x)$ を求めよ．答えの物理的解釈をせよ．$J[\bar{y}]$ の値は何か．$J[\bar{y}]$ の意味は何か．

2. 単振動する質点の運動エネルギーは $KE=(1/2)m\dot{y}^2(\dot{y}=dy/dt)$ で与えられ，位置エネルギーは $PE=(1/2)ky^2$ で与えられる．Hamilton の原理は，質点の運動 $y(t)$ が積分

$$\int_{t_1}^{t_2}[KE-PE]dt=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}[m\dot{y}^2-ky^2]dt$$

を最小にするように行われると述べている．もしこの法則が正しければ，振動する



ばねの一端に取り付けられた
振動する質点

質点はどのような微分方程式を満たすことになるか.

3. 境界条件 $y(0)=0$, $y(\pi/2)=1$ の下で汎関数

$$J[y]=\int_0^{\pi/2}[y'^2-y^2]dx$$

を最小にする関数 $\bar{y}(x)$ は $\bar{y}(x)=\sin x$ であることを示せ. $J[\sin x]$ の値を求めよ.

4. Euler-Lagrange の方程式

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0$$

を汎関数

$$J[u]=\iint_D F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy$$

から導き出せ.

参考書

R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers, 1953. 例題の多い古典的教科書である. その第4～第6章を見よ.

第45課　偏微分方程式を解くための変分法(Ritzの方法)

目的：　微分方程式をある汎関数の Euler–Lagrange の方程式と考えて，その汎関数の最小関数を求めることにより微分方程式を解く方法を示すこと．そのとき最小関数が偏微分方程式の解となる．もちろん，元の方程式を Euler–Lagrange の方程式としてもつ汎関数を求めることが問題である．

$$u_{xx}+u_{yy}=f \quad (\text{領域}\ D\ \text{内で})$$
$$u=0 \qquad\qquad (D\ \text{の境界上で})$$

のようなある楕円型境界値問題の解 u を求めることは，D の境界上で零になるような関数の中で位置エネルギーの汎関数

$$J[u]=\iint_D [u_x{}^2+u_y{}^2+2uf]dxdy$$

を最小にする関数 u を求めることに等価である，という有名な結果（最小エネルギーの定理）を紹介する．すなわち，$\nabla^2 u=f$ は $J[u]$ の Euler–Lagrange 方程式である．$J[u]$ の近似最小関数を Ritz の方法により求め，偏微分方程式の解（近似解）を得る．Ritz の方法を論じ，その技法を使って汎関数を最小化する例を挙げる．

（ぴんと張った太鼓の膜のような）境界値問題を，太鼓の膜の位置エネルギーが最小になるような滑らかな面を探すことによって解くというたいへんすばらしい方法がある．すなわち，偏微分方程式をある汎関数 $J[u]$ の Euler–Lagrange 方程式であると考えるなら，汎関数を最小にすることにより微分方程式を解くことができる（なぜならば，汎関数の最小関数は対応する Euler–Lagrange 方程式の解でもあるから）．第44課においては，Euler–Lagrange

の方程式が常微分方程式となるような　汎関数だけを考えた．この課では，Euler–Lagrange の方程式が偏微分方程式となるような汎関数を考えよう．たとえば，汎関数

$$J[u]=\int_0^1\int_0^1[u_x{}^2+u_y{}^2]dxdy$$

は Euler–Lagrange 方程式として

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

をもつ（証明は前の課の常微分方程式の場合と同様）．したがって，単位正方形内の Dirichlet 問題

偏微分方程式　$u_{xx}+u_{yy}=0$　$(0<x<1,\ 0<y<1)$

境界条件　$u=g$　（正方形の境界上で）

を解くには，その代りに，境界上で g に等しい関数 $u(x,y)$ で $J[u]$ を最小にするようなものを求めてもよい．汎関数

$$J[u]=\int_0^1\int_0^1[u_x{}^2+u_y{}^2]dxdy$$

が太鼓の膜の位置エネルギーを表すので，われわれは今，最小位置エネルギー面を求めているといっても恐らく特に意外なことはないであろう．もちろん，微分方程式が与えられたとき，解の位置エネルギーを表す汎関数 $J[u]$ をどうやって求めるかは問題である．これに対する答えはよく知られた定理（最小エネルギーの定理）の中にある．その定理は次の通りである：

Dirichlet 問題

偏微分方程式　$\nabla^2u=f$　（領域 D 内で）

境界条件　$u=0$　（D の境界上で）

の解 u は，境界条件 $u=0$ を満たす関数の中でエネルギー汎関数

$$J[u]=\int_D\int[u_x{}^2+u_y{}^2+2uf]dxdy$$

を最小にする関数 u と同じ関数である．この課の“参考書”の中では，別の形の境界条件についてこの定理を述べかつ証明している．定理の理解を助けるために一つの例を挙げよう．

Poisson の方程式を位置エネルギー汎関数で置き変えること

Dirichlet 問題

(45.1)　偏微分方程式　$u_{xx}+u_{yy}=f$　$(0<x<1,\ 0<y<1)$
　　　　境界条件　$u=0$　（正方形の境界上で）

を考えよう．図 45.1 を見よ．

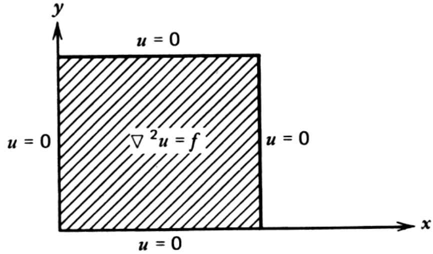


図 45.1　正方形内部の Poisson 方程式

ここでは，エネルギー汎関数 $J[u]$ は

$$J[u]=\int_0^1\int_0^1[u_x^2+u_y^2+2uf]dxdy \tag{45.2}$$

であり，したがって，問題 (45.1) を解くには $J[u]$ を最小にする関数 $\bar{u}$ を（境界上で零になる関数の中から）求めれば十分である．

以上でこの課の最初の部分を終わる．残りの部分では，Ritz の方法を使って $J[u]$ の最小関数 $\bar{u}$ を求める方法を示そう．

汎関数を最小にするための Ritz の方法

この課の“参考書”の中では，汎関数の最小化のためのいくつかの方法が論じられているが，Ritz の方法はそれらの中の一つである．この考え方は数学者 W. Ritz（リッツ）が導入したもので，とても簡単である．それは以下のステップから成っている．

ステップ 1　汎関数

$$J[u]=\int_0^1\int_0^1[u_x^2+u_y^2+2uf]dxdy$$

の中の関数 u を，近似関数（n は利用者が適当に選ぶ）

$$u_n(x,y)=a_1\phi_1(x,y)+a_2\phi_2(x,y)+\cdots+a_n\phi_n(x,y)$$

で置き変える．ここで，関数 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \cdots, \phi_n$ はみな境界上で零になるようにあらかじめ選んであり，問題の解を十分良く近似できるような関数族であるとする．単位正方形内の Dirichlet 問題に対する選び方として代表的なものは

$$
\begin{aligned}
\phi_1(x,y) &= xy(1-x)(1-y) \longleftarrow \text{境界上で零} \\
\phi_2(x,y) &= x\phi_1(x,y) \\
\phi_3(x,y) &= y\phi_1(x,y) \\
\phi_4(x,y) &= x^2\phi_1(x,y) \\
\phi_5(x,y) &= xy\phi_1(x,y) \\
\phi_6(x,y) &= y^2\phi_1(x,y) \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

であろう．具体的に，解の最初の 4 個の近似式は

$$
\begin{aligned}
u_1(x,y) &= a_1xy(1-x)(1-y) \\
u_2(x,y) &= xy(1-x)(1-y)[a_1+a_2x] \\
u_3(x,y) &= xy(1-x)(1-y)[a_1+a_2x+a_3y] \\
u_4(x,y) &= xy(1-x)(1-y)[a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2] \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

となる．

ステップ 2　汎関数

$$
J[u_n] = \int_0^1\int_0^1 \left\{\left[\sum_{j=1}^n a_j\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^n a_j\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\right]^2 + 2f\left[\sum_{j=1}^n a_j\phi_j\right]\right\}dxdy
$$

は $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の関数であり，したがって，J を最小にするこれらの係数の値を求めるために，次の偏導関数を零に等しいと置く：

$$
\frac{\partial J[u_n]}{\partial a_1} = 2\int_0^1\int_0^1 \left\{\sum_{j=1}^n\left[\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi_j}{\partial y}\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right]a_j + f\phi_1\right\}dxdy = 0
$$

$$
\vdots \qquad\qquad \vdots
$$

$$
\frac{\partial J[u_n]}{\partial a_n} = 2\int_0^1\int_0^1 \left\{\sum_{j=1}^n\left[\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\frac{\partial\phi_n}{\partial x} + \frac{\partial\phi_j}{\partial y}\frac{\partial\phi_n}{\partial y}\right]a_j + f\phi_n\right\}dxdy = 0
$$

このように書くと大変複雑そうに見えるが．上の方程式は行列の形に書き直せば，連立 1 次方程式

$$
Aa = b
$$

の形になる．ここで，

$A=(A_{ij})$ は $n\times n$ 行列でその要素は次のように計算できる：

$$A_{ij}=\int_0^1\int_0^1\left[\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\right]dxdy \tag{45.3}$$

$b=(b_i)$ はベクトルでその成分は

$$b_i=-\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\phi_i(x,y)dxdy \tag{45.4}$$

$a=(a_i)$ は未知数のベクトルで，その要素は近似解 $u_n(x,y)=a_1\phi_1(x,y)+\cdots+a_n\phi_n(x,y)$ の係数を表す.

ステップ 3 連立1次方程式 $Aa=b$ を解いて係数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を求める.

このようにして，近似最小関数

$$u_n(x,y)=a_1\phi_1(x,y)+a_2\phi_2(x,y)+\cdots+a_n\phi_n(x,y)$$

すなわち，Dirichlet 問題（47.1）の近似解が得られる.

注意

1. この課では，二重積分で表される汎関数を最小にするのに Ritz の方法を用いた．それはまた

$$J[y]=\int_0^1[y^2+y'^2]dx$$

$$y(0)=0, \qquad y(1)=1$$

のような一重積分の汎関数を最小にするのにも使える．違いは，$y_n(x)=a_1\phi_1+a_2\phi_2+\cdots+a_n\phi_n$ における関数 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ が境界条件

$$\left.\begin{array}{l}\phi_i(0)=0\\ \phi_i(1)=1\end{array}\right. \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

を満たさなければならないということだけである.

2. 二重積分

$$J[u]=\int_0^1\int_0^1[u_x{}^2+u_y{}^2]dxdy$$

の Euler-Lagrange 方程式が Laplace 方程式であることをこの課では証明しなかったが，その証明は一重積分について第44課で述べたことと同様にしてできる.

3. この課の“参考書”の中には，もっと他のいろいろな微分方程式（Poisson の方程式以外の）といろいろな境界条件（Dirichlet 型 $u=0$ 以外の）に対するエネルギー汎関数 $J[u]$ の作り方が示されている．したがって，対応するエネルギー汎関数を最小にすることによっていろいろな種類の境界

値問題を解くことができる．

4. n を大きく選べば選ぶほど，$J[u_n]$ の実際の値は小さくなる．したがって，微分方程式の近似解はより正確になる．n を順次大きくしていきながら $u_n(x,y)$ を計算し，それにつれてどのように $J[u_n]$ が減少していくかを見るというのも一つのやり方である．
5. 実用上は，n が非常に小さいときは別として，Ritz の方法の計算は計算機を用いて行わなければならないであろう．図 45.2 の流れ図は，境界値問題（45.1）を Ritz の方法で解くための計算を説明している．

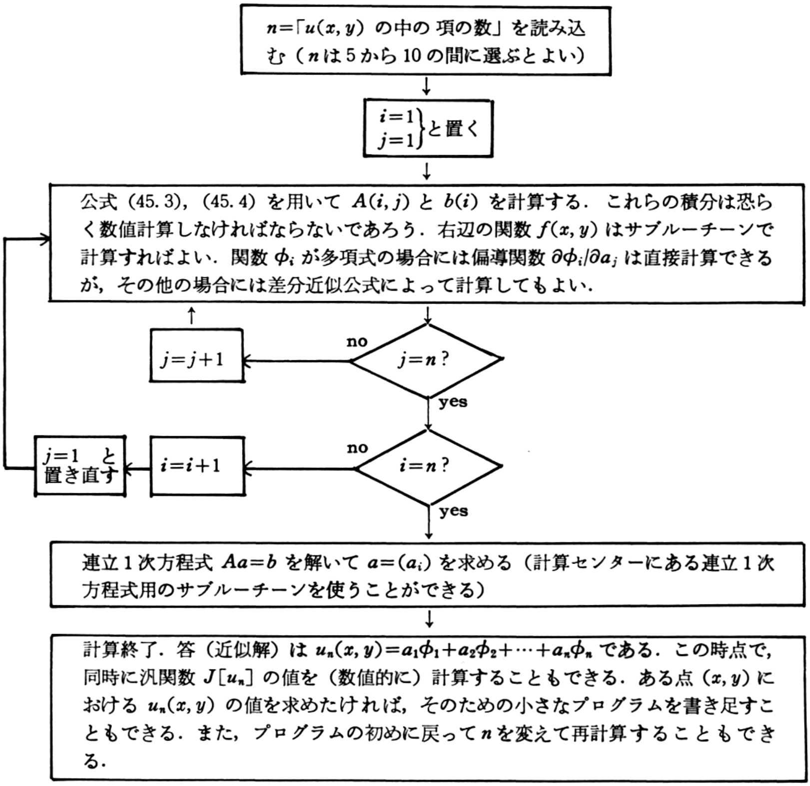


図 45.2　Ritz の方法の流れ図．

利用者は関数 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ を定義するサブルーチーンを自分で用意して，それを使って計算しなければならない．サブルーチーンはたとえば次のようなものとなるであろう：

```
      SUBROUTINE BC (X,Y,PHI)
C     SUBROUTINE PROVIDED BY THE USER TO EVALUATE THE
C     FUNCTIONS PHI(1),PHI(2), . . ., PHI(N)
      DIMENSION PHI(20)
      PHI(1) = X*Y*(1-X)*(1-Y)
      PHI(2) = X*PHI(1)      (これらは上で用いた
      PHI(3) = Y*PHI(1)       関数である)
        .       .
        .       .
        .       .
      PHI(N) = (どんな式を書いてもよい)
      RETURN
      END
```

練習問題

1. 次の問題に対応するエネルギー汎関数 $J[u]$ は何か.

偏微分方程式 $u_{xx}+u_{yy}=1$ $(0<x<1,\ 0<y<1)$

境界条件 $u=0$ (境界上で)

2. Ritz の方法によって汎関数

$$J[y]=\int_0^1[y^2+y'^2]dx\ ;\ y(0)=0,\ \ y(1)=1$$

を最小にする方法を述べよ.

ヒント 新しい関数 $z(x)$ を

$$y(x)=x+z(x)$$

によって導入すると, $z(x)$ は $z(0)=0$, $z(1)=0$ を満たすことに注意せよ.

3. 図 45.2 の計算を実行する計算機プログラムを書け.

4. 汎関数 $J[u]$

$$J[u]=\int_0^1\int_0^1[u_x^2+u_y^2]dxdy$$

の Euler-Lagrange 方程式は

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

であることを示せ.

5. Dirichlet 問題

$u_{xx}+u_{yy}=\sin(\pi x)$ $(0<x<1,\ 0<y<1)$

$u=0$　　　　（正方形の境界上で）

は有限正弦変換（変数 x を変換する）によって解くことができて，解

$$u(x, y)=\left[Ae^{\pi y}+Be^{-\pi y}-\frac{1}{\pi^2}\right]\sin(\pi x)$$

をもつ．ここで $A=0.00420$，$B=0.0971$ である．この解の位置エネルギーはどうやって求められるか．正弦変換を使ってこの解 $u(x, y)$ を求めることもよい復習になるであろう．

参考書

S. G. Miklin, *Variational Methods in Mathematical Physics*, Macmillan, 1964.
この本は，汎関数を最小にするためのいろいろな方法と，それを偏微分方程式の解法にどう応用するかを述べている．Ritz の方法の他に，有名な Galerkin（ガレルキン）法のことも論じている．第 3～第 4 章を見よ．

第46課　偏微分方程式を解くための摂動法

目的：　易しい問題に摂動を加えることによってもっと難しい問題（非線形方程式，変数係数の方程式，不規則な領域，等）を解く方法を示すこと．すなわち，易しい問題の解を修正して難しい問題の解を近似する方法を示す．

例として，非線形問題

偏微分方程式　$\nabla^2 u + u^2 = 0 \quad (0<r<1)$

境界条件　$u(1, \theta) = \cos\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$

の解を，線形の Dirichlet 問題

偏微分方程式　$\nabla^2 u = 0 \quad (0<r<1)$

境界条件　$u(1, \theta) = \cos\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$

の解の摂動により近似する方法を示す．

解が知られている問題を連続的に変形していき，それに従って初めの問題の解も次第に修正することによって，近傍にある問題の解を求めることができることが多い．すなわち，最初の問題（とその解）を，近傍の問題の解が求められるまで，次第に連続的に修正（摂動）するのである．

たとえば，Laplace 方程式

$$\nabla^2 u = 0$$

を

$$\nabla^2 u + \varepsilon u^2 = 0 \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1)$$

というパラメータ ε を含んだ問題の族を通して連続的に修正して，新しい非線形方程式

$$\nabla^2 u + u^2 = 0$$

に到達させることができる．このようにして，Laplace 方程式の解を修正して非線形問題を解くことができる（図 46.1）．

$\nabla^2 u=0$	$\longrightarrow$	$\nabla^2 u+\varepsilon u^2=0$	$\longrightarrow$	$\nabla^2 u+u^2=0$
$(\varepsilon=0)$		$(0<\varepsilon<1)$		$(\varepsilon=1)$
解		解		解
u_0	$\longrightarrow$	$u=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k$	$\longrightarrow$	$u=\sum_{k=0}^{\infty}u_k$

図 46.1　摂動法の図式.

摂動された Laplace 方程式

$$\nabla^2 u+\varepsilon u^2=0$$

の解を求めるには，小さな摂動による項を付加して Laplace 方程式の解 u_0 を修正する．摂動された方程式

$$\nabla^2 u+\varepsilon u^2=0$$

が

$$u=u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\cdots \tag{46.1}$$

という形の解をもつということはもっともらしい．ε のベキ級数 (46.1) は $\varepsilon=0$ のとき Laplace 方程式の解 $u=u_0$ に一致し，$\varepsilon=1$ のとき非線形問題

$$\nabla^2 u+u^2=0$$

の解になるということに注意せよ．つまり，式 (46.1) は，Laplace 方程式から非線形方程式までわれわれを運んでくれる乗り物のような働きをする．問題はベキ級数 (46.1) における関数 $u_0, u_1, u_2, \cdots$ を求めることである．この課の残りの部分では，この一般的な原理に従って，いろいろな境界値問題を解く方法を示すことにする．

非線形方程式 $\nabla^2 u+u^2=0$ の摂動解

次のような非線形 Dirichlet 問題（極座標）を解こうとしているとしよう：

(46.2)
偏微分方程式　$\nabla^2 u+u^2=0 \quad (0<r<1)$
境界条件　$u(1,\theta)=\cos\theta \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$

ここでの考え方は，この非線形問題 (46.2) を

(46.3)
偏微分方程式　$\nabla^2 u=0 \quad (0<r<1)$
境界条件　$u(1,\theta)=\cos\theta \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$

という線形問題（その解が $u_0(r,\theta)=r\cos\theta$ であることは知られている）の摂動とみなして，問題 (46.2) を満たすように $u_0(r,\theta)$ を修正する方法を調べようというのである．前に述べたように，問題の族 $\nabla^2 u+\varepsilon u^2=0$ を導入してこの問題族の中の各方程式の解で

(46.4)　$$u(r,\theta)=u_0(r,\theta)+\varepsilon u_1(r,\theta)+\varepsilon^2 u_2(r,\theta)+\cdots$$

という形のものを探す．そうすると，$\varepsilon=1$ とすることによって非線形問題 (46.2) の解が求められる．摂動された問題

$$\text{偏微分方程式}\quad \nabla^2 u+\varepsilon u^2=0$$
$$\text{境界条件}\quad u(1,\theta)=\cos\theta$$

に摂動解の候補 (46.4) を代入すると

$$\nabla^2(u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\cdots)+\varepsilon(u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\cdots)^2=0$$
$$u_0(1,\theta)+\varepsilon u_1(1,\theta)+\varepsilon^2 u_2(1,\theta)+\cdots=\cos\theta$$

が得られる．少しばかり式の計算をして，ε の各ベキの係数を互いに等しいと置くと，次のような問題の列 $P_0, P_1, P_2, \cdots$ に到達し，この一群の問題を解いて未知関数 $u_0, u_1, \cdots$ を次々に定めていくことができる（問題が線形，非同次であることに注意せよ）：

$$P_0\ \begin{cases}\nabla^2 u_0=0 & (0<r<1)\\ u_0(1,\theta)=\cos\theta\end{cases}\qquad \text{この解は}\quad u_0(r,\theta)=r\cos\theta$$

$$P_1\ \begin{cases}\nabla^2 u_1=-{u_0}^2\\ u_1(1,\theta)=0\end{cases}$$

$$P_2\ \begin{cases}\nabla^2 u_2=-2u_0u_1\\ u_2(1,\theta)=0\end{cases}$$

$$\vdots\qquad\vdots$$

u_0 は既知であるので，問題 P_1 から $u_1(r,\theta)$ を求めることから始めよう．

$$P_1\ \begin{cases}\nabla^2 u_1=-r^2\cos^2\theta=-\dfrac{r^2}{2}[1+\cos(2\theta)]=-\dfrac{r^2}{2}-\dfrac{r^2}{2}\cos(2\theta)\\ u_1(1,\theta)=0\end{cases}$$

この非同次問題を解くには，常微分方程式論の常套手段である次のような手法を使う：

1. 同次方程式の一般解 y_h を求める
2. 非同次方程式の特殊解 y_p を求める
3. y_h+y_p を境界条件に代入して未定定数を定める

問題 P_1 に対してはこの手法はうまくいく．$\nabla^2 u=0$ $(0<r<1)$ の同次解の一般形として変数分離法による解

$$u_h(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

を選ぼう．ところで，非同次方程式

$$\nabla^2 u = -\frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\cos(2\theta)$$

の特殊解を求める（1 個だけ求めればよい）ため

$$u_p(r, \theta) = Ar^4 + Br^4 \cos(2\theta)$$

という形の式を試してみよう．（右辺が r^n, $r^n \cos(n\theta)$, $r^n \sin(n\theta)$ という形のとき，それぞれ，Ar^{n+2}, $Br^{n+2}\cos(n\theta)$, $Cr^{n+2}\sin(n\theta)$ という形の解が生じる.）この $u_p(r, \theta)$ を非同次方程式に代入すると

$$A = -\frac{1}{32}, \qquad B = -\frac{1}{24}, \qquad C = 0$$

を得る．したがって

$$u_p(r, \theta) = -\frac{r^4}{32} - \frac{r^4}{24}\cos(2\theta)$$

である．

P_1 を解く最後のステップは，一般解 $u(r, \theta) = u_h(r, \theta) + u_p(r, \theta)$ を境界条件 $u(1, \theta) = 0$ に代入して，係数 a_n と b_n を定めることである．代入すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] - \frac{1}{32} - \frac{1}{24}\cos(2\theta) = 0$$

となるので，$a_0 = 1/32$, $a_2 = 1/24$, 他のすべての a_n, b_n は零である．すなわち，問題 P_1 の解は

$$u_1(r, \theta) = \frac{1}{32} + \frac{1}{24} r^2 \cos(2\theta) - \frac{1}{32} r^4 - \frac{r^4}{24}\cos(2\theta)$$

$$= -\frac{(r^4 - 1)}{32} - \frac{(r^4 - r^2)}{24}\cos(2\theta)$$

となる．関数 $u_1(r, \theta)$ を $u_0(r, \theta)$ の **1 次摂動**と呼び，これを $u_0(r, \theta)$ に加えることにより問題 (46.2) の新しい近似解

(46.5)
$$u = u_0 + u_1 = r\cos\theta - \frac{(r^4 - 1)}{32} - \frac{(r^4 - r^2)}{24}\cos(2\theta)$$

が得られる．次の摂動 $u_2(r, \theta)$ を求めるには

$$P_2 \begin{cases} \nabla^2 u_2 = -2 u_0 u_1 \\ u_2(1, \theta) = 0 \end{cases}$$

を解かなければならない．ここで，この方程式の右辺にはすでに定められている $u_0(r, \theta)$ と $u_1(r, \theta)$ を代入する．これらの式の計算は計算機の助けを借りないとそれ自体が大変な問題であることはいうまでもない．幸いにして，式

(46.5) がすでに問題 (46.2) のかなり正確な解となっている．実際，この近似式を非線形方程式の左辺

$$\nabla^2 u + u^2$$

に代入すると，円の内部 $0<r<1$ の至るところでほとんど零になることがわかる．

摂動の理論は，非線形方程式を解くこと以外にも，たとえば不規則境界をもつ問題を解くのにも適用することができる（境界が著しく不規則でない限り）．簡単な例を挙げよう．

境界摂動の例

摂動できるのは偏微分方程式だけではない．歪んだ円形領域の内部での Laplace 方程式の解を，円の内部の Laplace 方程式の解を摂動することによって求めることができる．たとえば，曲線 $r=1+(1/4)\sin\theta$ で囲まれた領域の内部のポテンシャルを，その境界上でのポテンシャル u が与えられているとして，求めるにはどうしたらよいか．つまり

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u = 0 \quad \left(0<r<1+\frac{1}{4}\sin\theta\right) \\ &u\left(1+\frac{1}{4}\sin\theta, \theta\right) = \cos\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \end{aligned} \tag{46.6}$$

の解を求めるにはどうしたらよいであろうか．図 46.2 を見よ．

この問題を，針金の高さが $\cos\theta$ であるような歪んだ円形領域の内部の石鹼膜の位置を記述する問題と考えることができる．

摂動の手順の一般精神は，難しい問題を易しい問題に書き変えることであるから，歪んだ円形領域の境界条件

$$u\left(1+\frac{1}{4}\sin\theta, \theta\right) = \cos\theta$$

を境界条件の族

$$u(1+\varepsilon\sin\theta, \theta) = \cos\theta \quad \left(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{4}\right)$$

の中の一方の端にある条件であるとみなそう．図 46.3 を見よ．

そうすると，Taylor 級数を使って考えればよさそうである．

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots$$

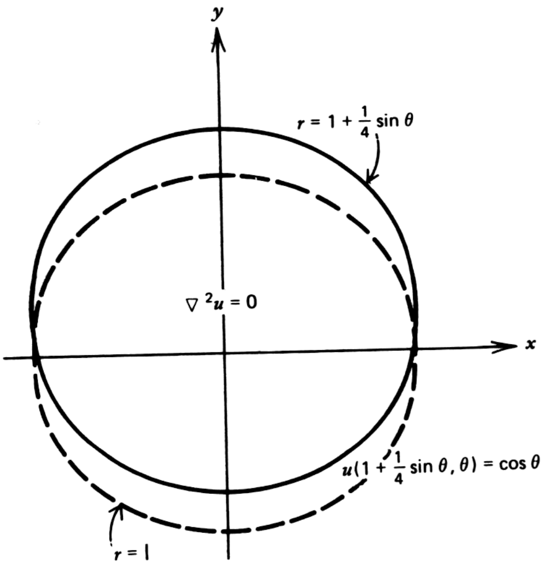


図 46.2　歪んだ円形領域の内部の Laplace 方程式

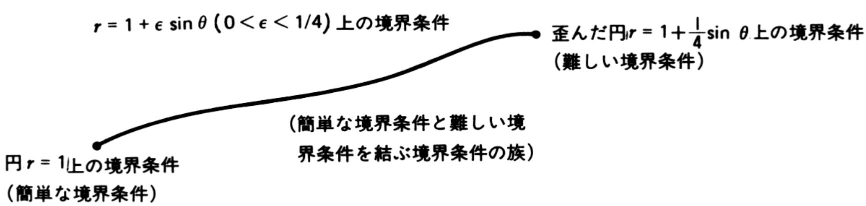


図 46.3　摂動の手順の図式的な説明

のような Tayler 級数を使うと，難しい境界条件を易しい境界条件を使って展開できる．つまり，

$$u(1+\varepsilon\sin\theta,\theta)=u(1,\theta)+u_r(1,\theta)(\varepsilon\sin\theta)+u_{rr}(1,\theta)\frac{(\varepsilon\sin\theta)^2}{2!}+\cdots$$

である．これを元の問題に代入すると，新しい等価な問題が得られる（もちろん，最後には $\varepsilon=1/4$ とおく）：

$$\nabla^2 u=0 \quad (0<r<1+\varepsilon \sin\theta)$$

(46.7)
$$u(1,\theta)+u_r(1,\theta)(\varepsilon\sin\theta)+u_{rr}(1,\theta)\frac{(\varepsilon\sin\theta)^2}{2}+\cdots=\cos\theta$$

もちろん，これもあまり易しい問題とは見えないが，この問題を問題の系列に分解して，求める解

(46.8)
$$u=u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\cdots$$

における関数 $u_0, u_1, u_2, \cdots$ を個々に順次求めていくことができる．この級数を問題 (46.7) に代入すると，$u_0, u_1, u_2, \cdots$ を定めるための次のような問題列が得られる．

$$P_0 \begin{cases}\nabla^2 u_0=0 & (0<r<1\,;\text{円内部})\\ u_0(1,\theta)=\cos\theta\end{cases} \qquad u_0(r,\theta)=r\cos\theta$$

$$P_1 \begin{cases}\nabla^2 u_1=0 \quad (0<r<1\,;\text{円内部})\\ u_1(1,\theta)=-\sin\theta\dfrac{\partial u_0(1,\theta)}{\partial r}=-\sin\theta\cos\theta\end{cases}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

したがって，これらの Dirichlet 問題（円の内部の）を次々と解いて $u_0, u_1, u_2, \cdots$ を定め，そうして歪んだ円形領域内の Dirichlet 問題の解

$$u=u_0+\frac{1}{4}u_1+\left(\frac{1}{4}\right)^2 u_2+\cdots$$

を得ることができる（最後に $\varepsilon=1/4$ としたことに注意せよ）．読者は機会を捕えて，1次の摂動 u_1 を求めて近似式

$$u_0+\frac{1}{4}u_1$$

がどのくらいよく方程式 (46.6) を満たすかを調べてみるとよい．

注意

摂動という方法で解ける偏微分方程式の問題は非線形問題だけではない．初期値問題

(46.10)
$$\begin{aligned}u_t&=(1+x)u_{xx}\\ u(x,0)&=\phi(x)\end{aligned} \qquad (-\infty<x<\infty)$$

も，パラメータを含んだ式

(46.11)
$$u_t=(1+\varepsilon x)u_{xx}$$

を導入して

$$u=u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\cdots$$

の形の解を探すことによって摂動法で解ける．この式を問題 (46.11) に代入すると次のような問題列が得られる：

$$P_0 \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ u_0(x,0)=\phi(x) \end{cases}$$

$$P_1 \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=x\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ u_1(x,0)=0 \end{cases}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

この課で例に取り上げた二つの問題は定数係数であったが，変数係数の場合もこのようにして扱えることに注意せよ．摂動のパラメータ ε は小さくなければならないことに気をつけるべきである．そうでないと無限級数が収束しないこともある．

練習問題

1. 式 (46.8) を問題 (46.7) に代入して問題列 $P_0, P_1, P_2, \cdots$ を求めよ．
2. 非線形問題

$$\nabla^2 u+u^2=0 \qquad (0<r<1)$$
$$u(1,\theta)=\cos\theta$$

からこの課に示した通りの線形な問題列 $P_0, P_1, P_2, \cdots$ が生じることを示せ．

3. 式 (46.5) を非線形問題

$$\nabla^2 u+u^2=0$$
$$u(1,\theta)=\cos\theta$$

に代入して，その精度を調べよ．

4. 境界摂動問題 (46.6) における問題 P_1 を解いて，近似解 $u(r,\theta)=u_0(r,\theta)+(1/4)u_1(r,\theta)$ がどのくらいよく

$$\nabla^2 u=0$$
$$u\left(1+\frac{1}{4}\sin\theta,\theta\right)=\cos\theta$$

を満たすかを調べよ．

参考書

G. F. Carrier, C. E. Pearson, *Partial Differential Equations : Theory and Tech-*

nique, Academic Press, 1976. 第8章と第15章に, 摂動論のいろいろな側面に関してよく説明してある. 優れた参考書である.

第 47 課　偏微分方程式の等角写像による解

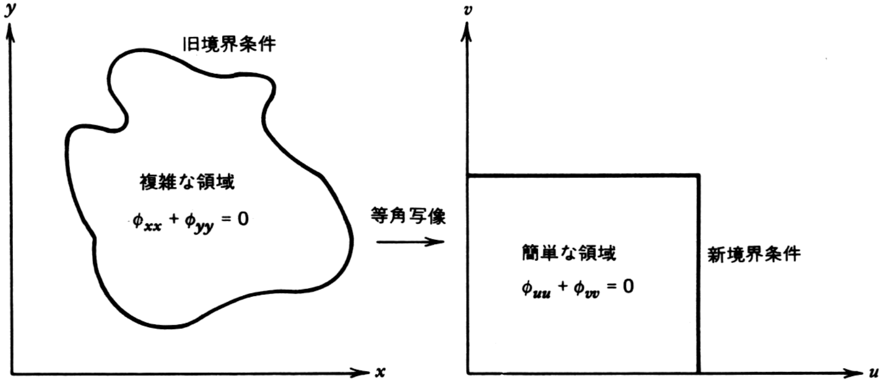
目的：等角変数変換により 2 次元境界値問題を新しい問題に変換する方法を示すこと．たとえば，xy 平面の複雑な領域での Laplace 方程式

$$\phi_{xx}+\phi_{yy}=0$$

（およびある型の境界条件）を，新しい uv 平面の簡単な領域での Laplace 方程式

$$\phi_{uu}+\phi_{vv}=0$$

に変換することによって，解くことができる．



写像が等角であるなら，元の座標系 (x, y) における Laplace 方程式 $\phi_{xx}+\phi_{yy}=0$ は新しい座標系 (u, v) においても Laplace 方程式 $\phi_{uu}+\phi_{vv}=0$ に変換される（$\phi_{uu}+2\phi_{uv}+\phi_{vv}=0$ のように方程式の形が変わることはない）．そこで，簡単な領域（円，半平面，正方形のような）内での Laplace 方程式を解いて $\phi(u, v)$ を定め，この解に変数の変換式 $u=$

$u(x,y)$, $v=v(x,y)$ を代入して，元の xy 座標を使った解 $\phi[u(x,y), v(x,y)]$ が得られる．

この課では次のことを説明する：

1. 等角写像の性質
2. 等角写像の構成法
3. 等角写像法により解ける問題の例

境界値問題を解くときの主な困難の一つは，境界が複雑なことである．比較的簡単な形の境界でも問題を非常に難しくする場合が多い．もちろん，不規則な境界を摂動法によって扱うという方法もあるが，これがうまくいくのは，一般に，境界が簡単な境界に近いときだけである．

しかし，境界がかなり一般的な形をしているときに2次元 Laplace 方程式を解く方法がある．それは，等角写像を応用する方法である．

ところで，この方法を実際に応用する前に，等角写像の概念および，もっと一般に，複素数について少し話をしなければならない．

等角写像および複素関数

この課では，後で必要となる複素変数に関する二三の概念を挙げるにとどめる．複素数 $z=x+iy$ は複素 xy 平面の点とみなすことができる（図 47.1）．

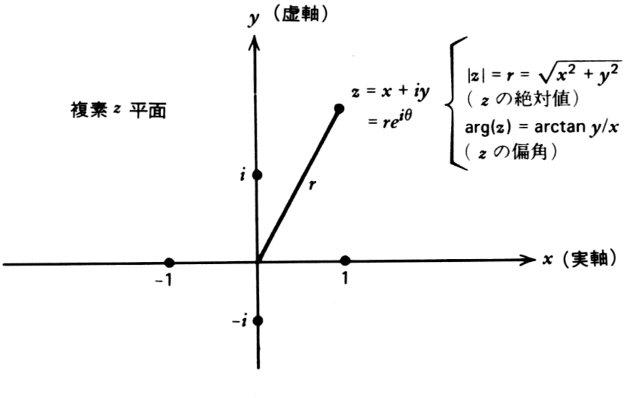


図 47.1　複素 z 平面と，いくつかの有用な公式

等角写像という概念を導入するためには，まず複素変数の関数

$$w=f(z)$$

という概念を導入しなければならない．ここで，z は複素変数（複素 z 平面に変域をもつ変数），$w=u+iv$ は新しい複素変数（新しい複素 w 平面内で式 $f(z)$ に従って動く）である．たとえば，複素 z 平面の第１象限内で定義される複素関数 $w=z^2$ はこの z の変域（第１象限）を複素 w 平面の上半分 $v>0$ 全体の上へ写像する．特に，下記の z 平面内の点は，$w=z^2$ により下記のような w 平面の点に写像される．

表 47.1

z 平面	$z\to z^2$	w 平面
0	⟶	0
i	⟶	-1
$1+i$	⟶	$2i$
x 軸	⟶	正の実軸
第１象限	⟶	上半平面

図 47.2 を見よ．

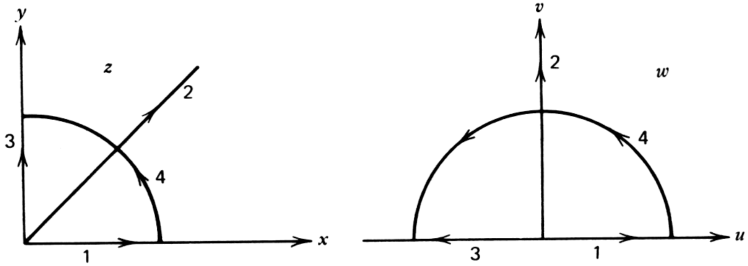


図 47.2　z 平面の第１象限を w 平面の上半分に写す写像

このように，（読者に馴染み深い実変数の関数とは異なり）複素変数の関数 $w=f(z)$ について述べるときには，z 平面の曲線が w 平面の曲線の上へどう写像されるかを論じるのが普通である．さらに先に進む前に，読者は $w=z^2$ のような複素写像がどのような等価な実数形に書けるかを知らなくてはいけない．そのような実数形を見れば，z 平面の元の座標 (x, y) が w 平面の新しい座標 (u, v) にどう写像されるかがわかる．実数形の写像を求めるには，$w=z^2$ を単に

$$u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$$

と書き直し，実部は実部に等しく，虚部は虚部に等しいと置けばよい．すなわち，

$$u=x^2-y^2 \qquad (w=z^2 \text{ の実数形})$$
$$v=2xy$$

が得られる．この形は後で役に立つであろう．この形は興味深い形である．すなわち，z 平面の双曲線が w 平面の座標直線 u＝一定，v＝一定 に写像される．

さて，等角関数（あるいは等角写像）と呼ばれる特別な種類の複素変数の関数の話に入ろう．

等角写像の定義

複素 z 平面と複素 w 平面の間の写像 $w=f(z)$ の導関数が $f'(z_0)\neq 0$ であれば，z 平面の点 z_0 において $w=f(z)$ は等角であるという．さらに，z 平面の領域 D の至るところで $f'(z)\neq 0$ ならば，$f(z)$ は D 内の至るところで等角であるという．

たとえば，$f(z)=z^2$ は，すべての $z\neq 0$ に対して $f'(z)=2z\neq 0$ であるから，$z=0$ を除く至るところで等角である．一方，$f(z)=e^z$ は，至るところでで $f'(z)=e^z\neq 0$ であるから，z 平面の至るところで等角である．もちろん，なぜ等角写像が役に立つのかという問に答えなければならない．それは次のようなわけである．xy 平面のある領域内で Laplace 方程式 $\phi_{xx}+\phi_{yy}=0$ を解く際に，xy 平面を複素 z 平面とみなして，z 平面から新しい w 平面への複素写像 $w=f(z)$ を導入することができる．w 平面は座標 (u,v) をもち，したがって元の Laplace 方程式 $\phi_{xx}+\phi_{yy}=0$ は新しい座標 u と v の新しい偏微分方程式に変換されるであろう．ここで肝心な点は，「写像 $w=f(z)$ が $\phi_{xx}+\phi_{yy}=0$ の領域内で至るところ等角ならば，新しい座標系 u,v に関する新しい変換された偏微分方程式もまた Laplace 方程式（新しい座標系 u,v に関する）となる」ということである．すなわち，方程式 $\phi_{xx}+\phi_{yy}=0$ は方程式 $\phi_{uu}+\phi_{vv}=0$ に変換される．そこで，元の複雑な境界を簡単な境界に変換する等角写像を求めるということに至る（$w=z^2$ は z 平面の第1象限の境界を w 平面の実軸に変換したことを思い出せ）．

等角写像を利用して偏微分方程式を解く方法を，二三の例を挙げて説明しよ

う．

上半平面の Laplace 方程式

次のような上半平面の Dirichlet 問題を解くことを考えよう（図 47.3）：

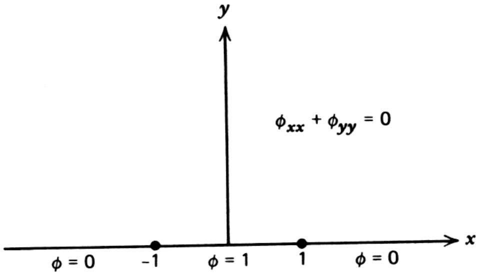


図 47.3　上半平面の境界値問題

$$(47.1)\qquad \begin{array}{ll} \text{偏微分方程式} & \phi_{xx}+\phi_{yy}=0 \quad (-\infty<x<\infty,\ 0<y<\infty) \\ \text{境界条件} & \phi(x,0)=\begin{cases}0 & |x|>1 \\ 1 & |x|\leqslant 1\end{cases} \end{array}$$

Fourier 変換を x 変数に適用するのもこの問題を解く一つの方法であるが，もっと簡単な方法は上半平面 $y>0$ を uv 平面の新しい領域に等角写像することである．少し努力すれば，等角写像

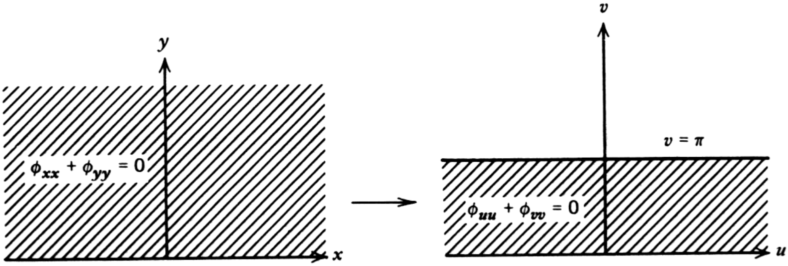


図 47.4　難しい問題から易しい問題への等角写像

$$w=\log\left\{\frac{z-1}{z+1}\right\}$$

が次のような性質をもつことがわかるであろう（図 47.4 を見よ）：

1. z 平面の上半分を w 平面の領域 $-\infty<u<\infty$, $0<v<\pi$ に等角に写像する.
2. z 平面の直線分 $y=0$, $-1<x<1$（そこでポテンシャル ϕ は1に等しい）は w 平面の直線 $v=\pi$, $-\infty<u<\infty$ に写像される.
3. z 平面の二つの直線分 $x>1$, $y=0$ および $x<-1$, $y=0$ は，それぞれ，平面の正と負の u 軸に写像される.

読者はしっかりと自分でこれらのことを確認しなければならない．これらの性質が大切なのは，元の問題（47.1）が今や易しい問題

(47.2)

偏微分方程式　$\phi_{uu}+\phi_{vv}=0$　$(-\infty<u<\infty,\ 0<v<\pi)$

境界条件　$\begin{cases}\phi(u,0)=0\\ \phi(u,\pi)=1\end{cases}$

に変換されるという事実にある．この易しい問題は自明な解 $\phi(u,v)=(1/\pi)v$ をもつ．したがって，元の問題（47.1）の解を求めるには，単に座標 v を x と y を使って表して，$\phi(u,v)=v/\pi$ に代入するだけでよい．それには，

$$w=u+iv=\log\left[\frac{z-1}{z+1}\right]$$
$$=\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+i\arg\left[\frac{z-1}{z+1}\right]$$

から，

$$v=\arg\left[\frac{z-1}{z+1}\right]=\arg\left[\frac{x+iy-1}{x+1+iy}\right]$$
$$=\arg\left[\frac{x^2+y^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2}\right]$$
$$=\arctan\frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

とすればよい（一般法則 $\arg(x+iy)=\arctan(y/x)$ を使った）.

したがって，元の問題（47.1）の解 $\phi(x,y)$ は

$$\phi(x,y)=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left[\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right]$$

である．いろいろな直線 $y=c$ に沿ってこの関数のグラフを調べて，これがどんな形をしているかを理解せよ.

第２の例として，同心でない２円の間の領域を同一中心をもつ円環領域に変換しよう．

同心でない２円の間の Dirichlet 問題

２円

$$x^2+y^2=1$$

$$(x-1)^2+y^2=9$$

の間のポテンシャル $\phi(x,y)$ を求めることを考える．ここで，内側の円上のポテンシャルが 1，外側の円上のポテンシャルが２であるとする（図 47.5）．

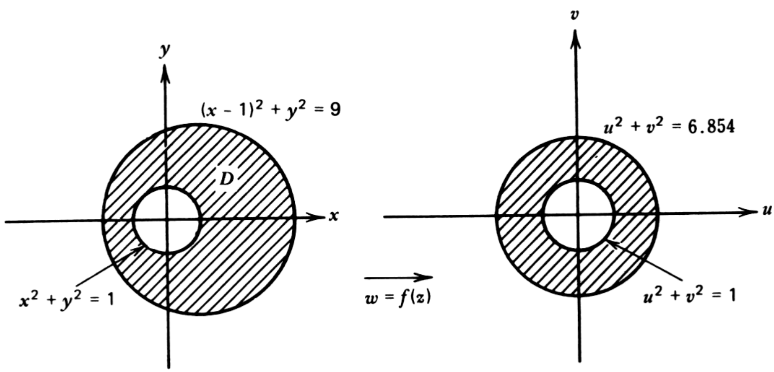


図 47.5　円環領域への等角写像

すなわち，元の問題は

$$\text{(47.3)}\qquad \begin{array}{ll} \text{偏微分方程式} & \phi_{xx}+\phi_{yy}=0 \quad (D\ \text{の内部で}) \\ \text{境界条件} & \begin{cases} \phi(x,y)=1 & (x^2+y^2=1\ \text{上で}) \\ \phi(x,y)=2 & ((x-1)^2+y^2=9\ \text{上で}) \end{cases} \end{array}$$

である．この領域を扱いやすい形の領域に変換する等角写像を求めて問題を簡単にすることを目指す．今の場合，与えられた領域を円環領域に写像する変換を探すのがよいことは明らかである．これはよく知られた変換ではないが，ちょうど適切な変換を与えてくれる本が何冊かある．詳しい本としては H. Kober（コーバー）著 "The Dictionary of Conformal Mappings" (Dover Publications) がある．そこには，普通よく現れる領域の間の写像が何百も載

せられている．少し時間をかけて表を引くのに馴れてしまえば，問題（47.3）に適当した等角写像を見つけることができる．今の場合，求める写像は

$$w=t\left[\frac{z-s}{z-t}\right] \quad (s=-0.1459,\ t=-6.854) \tag{47.4}$$

であることがわかる．等価な実数形で表すと，

$$\begin{aligned} u&=\gamma[(x-s)(x-t)+y^2] \\ v&=\gamma[y(s-t)] \end{aligned} \tag{47.5}$$

である．ここで

$$\gamma=t/[(x-t)^2+y^2]$$

である．この等角写像の下で，元の同心でない円は新しい円 $u^2+v^2=1$，$u^2+v^2=6.854$ に写像される（読者も確かめてほしい）．

この等角写像を元の問題（47.3）に適用すると，円環領域の内部の新しい Dirichlet 問題に到達する：

$$\begin{aligned} &\text{偏微分方程式}\quad \phi_{uu}+\phi_{vv}=0 \quad \text{（新しい円環領域の内部で）} \\ &\text{境界条件}\quad \begin{cases} \phi(u,v)=1 & \text{（円 } u^2+v^2=1 \text{ の上で）} \\ \phi(u,v)=2 & \text{（円 } u^2+v^2=6.854 \text{ の上で）} \end{cases} \end{aligned} \tag{47.6}$$

この解は中心対称であることがわかるが，Laplace 方程式の中心対称な解はすべて

$$\phi(r)=a\ln r+b, \qquad r=u^2+v^2$$

という形をしていることが知られているから，この問題の答えは難なく求められる．上式を（47.6）の境界条件に代入すると，

$$\phi(u,v)=0.5195\ln(u^2+v^2)+1$$

が得られ，変換（47.5）によって元の座標 x と y に代入し直すと，問題(47.3)の答え

$$\phi(x,y)=0.5195\ln(u^2+v^2)+1$$

が得られる．ただし，この最後の式の u と v は式（47.5）によって x, y の関数の形に書かれているものとする．

注意

1. Schwarz–Christoffel（シュヴァルツ・クリストッフェル）変換というのは，z 平面のかなり一般的な形の領域を w 平面の上半分に写す等角写像を構成する手順である（もちろん，問題の領域がいったん上半平面に変換

されてしまえば，さらにまたもっと扱いやすい領域に変換することもできる)．この方法はこの課の“参考書 1”に書かれている．

2. 等角写像法は，2 次元 Laplace 方程式にしか適用されないという意味で，いく分適用範囲が狭い方法である（少し修正すれば Poisson 方程式にも適用できるが)．

練習問題

1. 写像

$$w=\log\left[\frac{z-1}{z+1}\right]$$

はどんな領域で等角写像になっているか．これが z 平面の上半分を w 平面の帯状領域 $-\infty<u<\infty,\ 0<v<\pi$ の上へ写像することを確認せよ．

2. 写像 $w=z^3$ による z 平面の第 1 象限の像は何か．複素数を極形式

$$z=re^{i\theta}$$

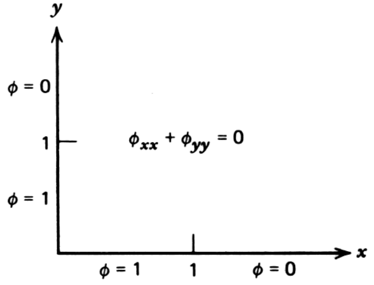
で書き表すとよくわかるであろう．

3. 第 1 象限内の Dirichlet 問題

偏微分方程式　$\phi_{xx}+\phi_{yy}=0\quad(0<x<\infty,\ 0<y<\infty)$

境界条件
$$\begin{cases}\phi(x,0)=\begin{cases}1 & (0<x<1)\\ 0 & (1\leqq x<\infty)\end{cases}\\[2ex] \phi(0,y)=\begin{cases}1 & (0<y<1)\\ 0 & (1\leqq y<\infty)\end{cases}\end{cases}$$

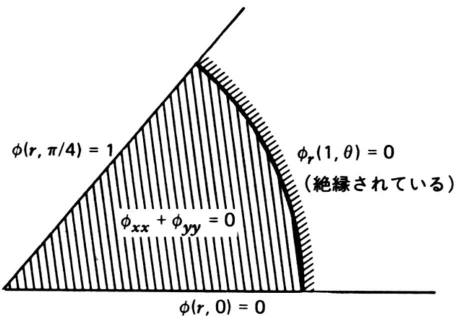
を等角写像 $w=z^2$ によって解け．次の図を見よ．



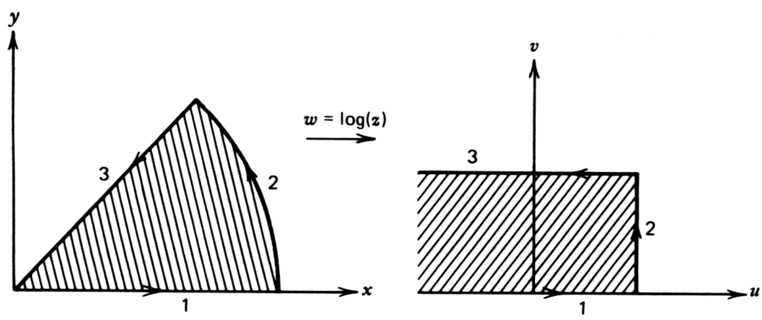
4. 次のような 45° の楔型領域の内部の混合型 Dirichlet–Neumann 問題を解け.

偏微分方程式　$\phi_{rr}+\dfrac{1}{r}\phi_r+\dfrac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta}=0 \quad \left(0<r<1,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$

境界条件　$\begin{cases}\phi(r,0)=0\\ \phi\left(r,\dfrac{\pi}{4}\right)=1\\ \phi_r(1,\theta)=0\end{cases}$



ヒント　複素関数 $w=\log z=\log|z|+i\arg(z)$ は z 平面の半直線 $\theta=c_1$ を w 平面の直線 $v=c_1$ に写像し, 円 $r=c_2$ を直線 $u=\log c_2$ に写像する (もちろん, log は自然対数を表す). 次の図を見よ.



参考書

1. R. V. Churchill, J. W. Brown, R. F. Verhey, ***Complex Variables and Applications***, 3rd ed., McGraw-Hill, 1977. この本は最良の書の一つである．等角写像（これは複素変数関数論の一部とみなせる）とその偏微分方程式への応用の主題を扱ったよい章を含んでいる．
2. H. Kober, ***Dictionary of Conformal Mappings***, Dover, 1960. これは紙表紙の廉価本であるが，等角写像の便利な一覧表を載せている．

付　録

積分変換表

表A：指数型Fourier 変換 (p.398)
表B：Fourier 正弦変換 (p.400)
表C：Fourier 余弦変換 (p.401)
表D：有限Fourier正弦変換 (p.403)
表E：有限Fourier余弦変換 (p.405)
表F：Laplace変換 (p.406)

表の中の関数の定義

$\delta(x)$ ＝デルタ関数

$$H(x-a)=\begin{cases}0 & x<a\\ 1 & x\geqq a\end{cases}$$ Heaviside 関数

$$H(a-x)=\begin{cases}1 & x\leqq a\\ 0 & x>a\end{cases}$$ 余 Heaviside 関数

表A　指数型Fourier変換

$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$	$F(\omega) = \mathcal{F}[f] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$
1. $f'(x)$	$i\omega F(\omega)$
2. $f''(x)$	$-\omega^2 F(\omega)$
3. $f^{(n)}(x)$ （n 次導関数）	$(i\omega)^n F(\omega)$
4. $f(ax)$　$a > 0$	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
5. $f(x-a)$	$e^{-ia\omega}F(\omega)$
6. $e^{-a^2x^2}$　$a>0$	$\dfrac{1}{a\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4a^2}$
7. $e^{-a\lvert x\rvert}$　$a>0$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{a^2+\omega^2}$
8. $\begin{cases} 1 & \lvert x\rvert < a \\ 0 & \lvert x\rvert > a \end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin a\omega}{\omega}$
9. $\begin{cases} x & \lvert x\rvert < 1 \\ 0 & \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{i}{\omega}\left(\cos\omega - \dfrac{1}{\omega}\sin\omega\right)$
10. $\delta(x-a)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ia\omega}$
11. $f(x)*g(x)$	$F(\omega)G(\omega)$
12. $(1+x^2)^{-1}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-\lvert\omega\rvert}$

表A 〔続き〕

$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$		$F(\omega) = \mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$
13. $xe^{-a\|x\|}$	$a>0$	$-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ia\omega}{(\omega^2+a^2)^2}$
14. $H(x+a)-H(x-a)$		$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}$
15. $\frac{a}{x^2+a^2}$	$a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\|\omega\|}$
16. $\frac{2ax}{(x^2+a^2)^2}$	$a>0$	$-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\omega e^{-a\|\omega\|}$
17. $\begin{cases}\cos(ax) & \|x\|<\pi/2a \\ 0 & \|x\|>\pi/2a\end{cases}$		$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2-\omega^2}\cos(\pi\omega/2a)$
18. $\begin{cases}1-\|x\| & \|x\|<1 \\ 0 & \|x\|>1\end{cases}$		$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega}\right]^2$
19. $\cos(ax)$		$\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a)]$
20. $\sin(ax)$		$i\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)]$

表B　Fourier正弦変換

$f(x) = \int_0^\infty F(\omega) \sin(\omega x)\, d\omega$ $0 < x < \infty$	$F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin(\omega x)\, dx$ $0 < \omega < \infty$
1. $f''(x)$	$-\omega^2 F(\omega) + \frac{2}{\pi}\omega f(0)$
2. $f(ax)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
3. e^{-ax}	$\frac{2\omega}{\pi(a^2 + \omega^2)}$
4. $x^{-1/2}$	$\left[\frac{2}{\pi\omega}\right]^{1/2}$
5. $H(a - x)$	$\frac{2}{\pi\omega}[1 - \cos(\omega a)]$
6. x^{-1}	1
7. $\frac{x}{x^2 + a^2}$	$e^{-a\omega}$
8. $\frac{x}{x^4 + 4}$	$\frac{1}{2}e^{-\omega} \sin \omega$
9. $\tan^{-1}\frac{a}{x}$	$\frac{1 - e^{-a\omega}}{\omega}$
10. $-x^2 f(x)$	$\frac{2}{\pi}F''(\omega)$

表C Fourier余弦変換

$f(x) = \int_0^\infty F(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega$ $0 < x < \infty$	$F(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx$ $0 < \omega < \infty$
1. $f''(x)$	$-\omega^2 F(\omega) - \frac{2}{\pi}f'(0)$
2. $f(ax)$	$\frac{1}{a}F(\omega/a)$
3. e^{-ax}	$\frac{2a}{\pi(a^2+\omega^2)}$
4. $\delta(x)$	$\frac{2}{\pi}$
5. $x^{-1/2}$	$\left[\frac{2}{\pi\omega}\right]^{1/2}$
6. $H(a-x)$	$\frac{2}{\pi\omega}\sin(a\omega)$
7. e^{-ax2}	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}e^{(-\omega 2/4a)}$
8. $\frac{\sin(ax)}{x}$	$H(a-\omega)$
9. $\frac{a}{x^2+a^2}$	$e^{-a\omega}$
10. $-x^2 f(x)$	$\frac{2}{\pi}F''(\omega)$

表D　有限正弦変換

有限正弦変換は公式

$$S_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

によって関数 $f(x)(0\leq x\leq \pi)$ を数列 $S_n(n=1,2,\cdots)$ に変換する．表を引く際には，変数 x の変域が区間 $[0,\pi]$ にあるようにしておくのが便利である．変換

$$y=\frac{\pi}{b-a}(x-a)$$

により任意の他の区間 $[a,b]$ を区間 $[0,\pi]$ に変換することができる．有限正弦変換といっても特に変わったことは何もない．$f(x)$ の Fourier 正弦変換における $\sin(nx)$ の係数が数列の要素 S_n である．すなわち

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} S_n\sin(nx)$$

表D　有限正弦変換

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(nx)$ $0 \leqslant x \leqslant \pi$	$S_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$ $n = 1, 2, \ldots$
1. $f''(x)$	$-n^2 S_n + \frac{2n}{\pi}[f(0) - (-1)^n f(\pi)]$
2. $\sin(mx) \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$	$\begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$	a_n
4. $\pi - x$	$\frac{2}{n}$
5. x	$\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$
6. 1	$\frac{2}{n\pi}[1 - (-1)^n]$
7. $\begin{cases} -x & x \leqslant a \\ \pi - x & x > a \end{cases}$	$\frac{2}{n}\cos(na) \qquad 0 < a < \pi$
8. $\begin{cases} (\pi - a)x & x \leqslant a \\ (\pi - x)a & x > a \end{cases}$	$\frac{2}{n^2}\sin(na) \qquad 0 < a < \pi$
9. $\frac{\pi}{2}e^{ax}$	$\frac{n}{n^2 + a^2}[1 - (-1)^n e^{a\pi}]$
10. $\frac{\sinh a(\pi - x)}{\sinh a\pi}$	$\frac{2n}{\pi(n^2 + a^2)}$

表E　有限余弦変換

有限余弦変換は公式

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx$$

によって関数 $f(x)(0\leq x\leq\pi)$ を数列 $C_n(n=1,2,\cdots)$ に変換する．表を引く際には，変数 x の変域が区間 $[0,\pi]$ にあるようにしておくのが便利である．変換

$$y=\frac{\pi}{b-a}(x-a)$$

により任意の他の区間 $[a,b]$ を区間 $[0,\pi]$ に変換することができる．有限余弦変換といっても特に変わったことは何もない．$f(x)$ の Fourier 余弦変換における $\cos(nx)$ の係数が数列の要素 C_n である．すなわち

$$f(x)=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(nx)$$

表E　有限余弦変換

$f(x) = \dfrac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(nx)$ $0 \leqslant x \leqslant \pi$	$C_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ $n = 0, 1, 2, \ldots$
1. $f''(x)$	$-n^2C_n - \dfrac{2}{\pi}[f'(0) - (-1)^n f'(\pi)]$
2. $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$	a_n
3. $f(\pi - x)$	$(-1)^n \dfrac{2}{\pi} C_n$
4. 1	$\begin{cases} 2 & n = 0 \\ 0 & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$
5. $\cos(mx) \quad m = 1, 2, \ldots$	$\begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$
6. x	$\begin{cases} \pi & n = 0 \\ \dfrac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$
7. x^2	$\begin{cases} 2\pi^2/3 & n = 0 \\ \dfrac{4}{n^2}(-1)^n & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$
8. $-\log(2 \sin x/2)$	$\begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1/n & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$
9. $\dfrac{1}{a}e^{ax}$	$\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{(-1)^n e^{a\pi} - 1}{n^2 + a^2}\right]$
10. $\begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ -1 & a < x < \pi \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}(2a - \pi) & n = 0 \\ \dfrac{4}{n\pi}\sin(na) & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$

表F　Laplace変換

	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1.	1	$\frac{1}{s}\quad s > 0$
2.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}\quad s > a$
3.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}\quad s > 0$
4.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}\quad s > 0$
5.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}\quad s > \lvert a\rvert$
6.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}\quad s > \lvert a\rvert$
7.	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\quad s > a$
8.	$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\quad s > a$
9.	$t^n \quad n =$ 正の整数	$\frac{n!}{s^{n+1}}\quad s > 0$
10.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\quad s > a$
11.	$H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}\quad s > 0$
12.	$H(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
13.	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
14.	$f(t)*g(t)$	$F(s)G(s)$

表F　Laplace変換〔続き〕

	$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$
15.	$f^{(n)}(t)$ （n 次導関数）	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
16.	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$
17.	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
18.	$\mathrm{erf}(t/2a)$	$\frac{1}{s} e^{a^2 s^2} \mathrm{erfc}(as)$
19.	$\mathrm{erfc}(a/2\sqrt{t})$	$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$
20.	$J_0(at)$	$(s^2 + a^2)^{-1/2}$
21.	$-e^{ak} e^{a^2 t} \mathrm{erfc}\left(a\sqrt{t} + \frac{k}{2\sqrt{t}}\right) + \mathrm{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{a e^{-k\sqrt{s}}}{s(a + \sqrt{s})} \quad k \geqq 0$

索　　引

あ　行

アルゴリズム algorithm　310, 317, 326
移動座標系 moving coordinates　115
インパルス応答関数 impulse-response function　97, 294
打ち切り誤差 truncation error　320
Euler の公式（Fourier 級数）Euler's formulas　85
Euler の流体運動方程式 Euler's equations of motion for a fluid　227
Euler 方程式（常微分方程式）Euler's equation　276
Euler-Lagrange の方程式（変分法）Euler-Lagrange equation　362
重み関数 weight function　59

か　行

解析解 analytical solution　329
拡　散 diffusion　115
拡散・対流方程式 diffusion-convection equation　18, 115
拡散方程式 diffusion equation　15
拡散率 diffusivity　27
重ね合わせ superposition　97, 202
片持ち梁 cantilever beam　169
過渡解 transient solution　47
基本解 fundamental solutions　40, 167, 240
基本振動 fundamental vibrations　240
球面調和関数 spherical harmonics　284
境界条件 boundary conditions
　Dirichlet(第1種)――Dirichlet (first kind)――　16, 21, 150, 260
　Neumann(第2種)――Neumann (second kind)――　26, 150, 261
　Robin(第3種)――Robin (third kind)――　22, 150, 263
境界摂動 boundary perturbation　380
境界値問題 boundary-value problem　258
　外部―― exterior――　281
　内部―― interior――　266
Crank-Nicolson 法 Crank-Nicolson method　323
Green 関数 Green's function　97, 294
弦の振動 vibrating string　127
Cauchy 問題 Cauchy problem　95
格子点 grid points　310
行進過程 marching process　315
高調波 harmonics　85, 162
交通流 traffic flow　221
誤差関数 error function　81, 106
固有関数 eigenfunctions　56
固有関数展開 eigenfunction expansion　66
固有値 eigenvalues　56, 228
固有ベクトル eigenvectors　68, 228

さ　行

最小エネルギーの方法 minimum energy method　369
最速降下線の問題 brachistochrone problem　360
差分（近似）finite-difference approximation　307
　後退―― backward-difference――　308
　前進―― forward-difference――　308
　中心―― central-difference――　308
差分法 finite-difference methods
　陰的―― implicit――　323
　陽的―― explicit――　315
次元降下法 method of descent　193
Schwarz-Christoffel 変換 Schwarz-Christoffel transformation　392

衝撃波 shock waves 217, 223
初期値・境界値問題 initial-boundary-value problem 17, 27
初期値問題 initial-value problem 95, 119
進行波 travelling waves 138, 143
振　動 vibrations
弦の―― ――of string 127
縦―― longitudinal―― 130, 150, 152
ねじれの―― torsional―― 130, 150, 152
梁の―― ――of beam 165
横―― transverse―― 127, 150
随伴同次問題 associated homogeneous problem 68
酔歩のゲーム tour du wino 352
数値解法 numerical methods
陰的差分法 implicit finite-difference method 323
陽的差分法 explicit finite-difference method 315
双曲型方程式の―― ――for hyperbolic equations 320
楕円型方程式の―― ――for elliptic equations 307
放物型方程式の―― ――for parabolic equations 316, 323
Sturm-Liouville 問題 Sturm-Liouville problem 59
Stokes の定理 Stokes theorem 191
スペクトル spectrum
関数の―― ――of a function 76, 87
周波数―― frequency―― 88
連続―― continuous―― 78
正弦変換 sine transforms 74
逆―― inverse―― 76
有限―― finite―― 76, 196
積分変換 integral transforms 74
（正弦, 余弦, Fourier, Laplace, Hankel 変換を見よ）
導関数の―― ――of derivatives 78, 94
積分変換の核 kernal of an integral transform 74
積分変換の表 tables of integral transforms 397
摂動法 perturbation methods 376
線形代数 linear algebra
――の復習 review of―― 228
双曲型偏微分方程式 hyperbolic partial differential equation 7, 127

た　行

太鼓の膜の振動 vibrating drumhead 235
対数ポテンシャル logarithmic potential 282
対　流 convection 64, 115
対流・拡散方程式 convection-diffusion equation 18, 115
楕円型偏微分方程式 elliptic partial differential equation 7, 179
畳み込み convolution
無限―― infinite―― 94
有限―― finite―― 104
D'Alembert 解 D'Alembert solution 133, 141
直交性 orthogonality 41, 85
定常解 steady state solution 70, 259
定常波 standing wave 157, 240
Dirichlet の定理 Dirichlet's theorem 86
Dirichlet 問題 Dirichlet problem
円環領域における―― ――in an annulus 274
外部―― exterior―― 281
内部―― interior―― 266
非同次の―― nonhomogeneous―― 294
Duhamel の原理 Duhamel's principle 110
δ 関数 delta function 297
電信方程式 telegraph equation 129, 228
伝送路方程式 transmission line equation 131
点湧き出し・点吸い込み point sources and sinks 295
等角写像 conformal mapping 385, 388
特異微分方程式 singular differential equation 288
特性曲線 characteristic curves 142, 148, 183, 209
特性曲線法 method of characteristics 209
特性方程式 characteristic equations 182

な 行

流れ図 flow diagram 319
波 waves
円柱—— cylindrical—— 188
球面—— spherical—— 188
進行—— travelling—— 138, 143
定常—— standing—— 157
平面—— plane—— 188
波の反射 reflection of waves 147
Newton の冷却の法則 Newton's law of cooling 23
Newton ポテンシャル Newtonian potential 286
熱拡散率 thermal diffusivity 27
熱伝導度 thermal conductivity 24, 33
熱伝導方程式 heat equation
——の導出 derivation of—— 30
側面絶縁の—— ——with lateral insulation 15
側面熱損失のある—— ——with lateral heat loss 17, 62
内部熱源のある—— ——with internal heat source 18
熱容量 thermal capacity 33

は 行

倍 音 harmonics 162
波動方程式 wave equation
——の直観的意味 intuitive interpretation of—— 129
——の導出 derivation of—— 127
1次元—— one-dimensional—— 127, 133
2次元—— two-dimensional—— 193
3次元—— three-dimensional—— 189
自由空間の—— ——in free space 188
パラメータの同定 parameter identification 331
梁の振動 vibrating beam 165
汎関数 functionals 359
Hankel 変換 Hankel transform 76, 107
反復法 iterative methods 311
非線形偏微分方程式 nonlinear partial differential equations 217
非同次境界条件 nonhomogeneous boundary conditions 46
非同次偏微分方程式 nonhomogeneous partial differential equations 6, 66, 203, 294
比 熱 specific heat 33
標準座標系 canonical coordinates 139
Fourier 級数 Fourier series 84
Fourier 係数 Fourier coefficients 85
Fourier 正弦変換 Fourier sine transform 76
Fourier 変換 Fourier transform 84, 92
逆—— inverse—— 84
Fourier 余弦変換 Fourier cosine transform 76
フラックス（流束）flux 23, 116
Bessel 関数 Bessel's functions 238
Bessel の方程式 Bessel's equation 238
Heaviside 関数 Heaviside function 117
Fermat の原理 Fermat's principle 365
Helmholtz の方程式 Helmholtz equation 236
変 換 transformations
境界条件の—— ——of boundary conditions 46
従属変数の—— ——of dependent variables 174
独立変数の—— ——of independent variables 174
難しい問題を易しい問題に—— ——of hard problems to easy ones 61
変換対 transform pair 75, 76
変数係数の偏微分方程式 partial differential equations with variable coefficients 6, 180
変数分離 separation of variables 36, 52, 158
偏微分方程式 partial differential equations
1階の—— first order—— 209
双曲型—— hyperbolic—— 7, 127
楕円型—— elliptic—— 7, 179
特異—— singular—— 288
非線形—— nonlinear—— 217
非同次—— nonhomogeneous—— 6, 66, 203, 294
変数係数の—— ——with variable co-

efficients　6, 180
放物型—— parabolic——　7, 13
偏微分方程式の標準形 canonical form of partial differential equations
双曲型 hyperbolic——　179, 181
楕円型 elliptic——　179, 336
放物型 parabolic——　179, 336
偏微分方程式の分類 classification of partial differential equations　179, 336
変分法 culculus of variations　359
Poisson の公式 Poisson's formula
3次元波動方程式に対する—— —— for the wave equation in three dimensions　191
Poisson の積分公式 Poisson's integral formula　266, 269, 301
Poisson 方程式 Poisson's equation　294
Huygens の原理 Huygens' principle　188, 192
放物型偏微分方程式 parabolic partial differential equations　7, 13
保存方程式 conservation equation　32, 217
ポテンシャル potential
対数—— logarithmic——　282
Newton—— Newtonian——　286

ま　行

丸め誤差 roundoff error　320
未定係数法 method of undetermined coefficients　72
無次元の変数 dimensionless variable　172
モンテ・カルロ法 Monte-Carlo methods　345

や　行

ヤング率 Young's modulus　153
余弦変換 cosine transforms　74
逆—— inverse——　76
有限—— finite——　76, 196
余誤差関数 complementary error function　81, 107

ら　行

ラプラシアン Laplacian　249
Laplace 変換 Laplace transform　76, 100, 110
逆——inverse——　76
Laplace 方程式 Laplace's equation
——の定義 definition of——　250
——の等角写像による解 solutions of—— by conformal mapping　385
——のモンテ・カルロ法による解 solutions of——by Monte-Carlo methods　355
円環領域における—— ——in an annulus　274
円板の—— ——in a disc　266
3次元の—— ——in three dimensions　284
正方形内の—— ——in a square　309
Lamm の方程式 Lamm's equation　335
乱　数 randon numbers　347
Ritz の方法 method of Ritz　368
Liebmann の方法 Liebmann's method　310
流束（フラックス）flux　23, 116
Legendre 多項式 Legendre's polynomial　288
Legendre 方程式 Legendre's equation　287, 288
連立偏微分方程式 systems of partial differential equations　227
Rodrigues の公式 Rodrigues' formula 288

著者略歴

Stanley J. Farlow

1937年　米国 Iowa 州 Emmetsburg 生まれ
　　　　Iowa 州立大学卒業（物理学）
　　　　Iowa 大学修士課程修了（数学）
　　　　Oregon 州立大学博士課程修了（数学）
現　在　米国 Maine 大学教授（数学）

訳者略歴

伊理正夫（いり・まさお）

1933年　東京都に生まれる
1960年　東京大学大学院数物系研究科
　　　　博士課程修了
現　在　中央大学教授，東京大学名誉教授
　　　　工学博士

伊理由美（いり・ゆみ）

1933年　東京都に生まれる
1958年　東京大学大学院数物系研究科
　　　　修士課程修了
現　在　東京理科大学，埼玉短期大学講師
　　　　工学修士

偏微分方程式
科学者・技術者のための使い方と解き方　　　　定価はカバーに表示．

1983 年 9 月 10 日　初版第 1 刷
1989 年 3 月 25 日　　　第 4 刷
1996 年 12 月 10 日　新版第 1 刷

訳　者　伊　理　正　夫
　　　　伊　理　由　美
発行者　朝　倉　邦　造
発行所　株式会社　朝　倉　書　店
東京都新宿区新小川町 6-29
郵便番号　162
電　話 03（3260）0141
FAX 03（3260）0180

〈検印省略〉

新日本印刷・渡辺製本

ISBN 4-254-11071-5　C 3041　　Printed in Japan